NOMOGRAPHIE.

LES CALCULS USUELS

EFFECTUÉS AU MOYEN

DES ABAQUES.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE.

Règles pratiques. — Exemples d'application,

PAR

MAURICE D'OCAGNE,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

A M. Gaillot
Hommage
et souvenir d'attachement
dévouement

Gauthier-Villars

NOMOGRAPHIE.

—

LES CALCULS USUELS

EFFECTUÉS AU MOYEN

DES ABAQUES.

17329 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

NOMOGRAPHIE.

LES CALCULS USUELS

EFFECTUÉS AU MOYEN

DES ABAQUES.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE.

Règles pratiques. — Exemples d'application,

PAR

MAURICE D'OCAGNE,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

AVANT-PROPOS.

Le calcul numérique est une nécessité journalière pour une foule de professions. Le physicien et plus particulièrement l'électricien, le financier, le navigateur, l'artilleur, etc., sont, à des degrés divers, tous soumis à cette nécessité; pour l'ingénieur, elle est particulièrement impérieuse. Or le calcul est une opération longue le plus souvent, et fastidieuse toujours, dont on doit, autant que possible, chercher à s'affranchir. L'idéal, en cet ordre d'idées, doit être, étant connues certaines données, d'en déduire instantanément et sans aucune opération intermédiaire, ou, du moins, par une opération réduite à sa plus simple expression, la quantité qu'on veut obtenir.

Ce résultat a été recherché de diverses manières. Nous citerons les Tables numériques, fort commodes assurément pour ceux qui s'en servent, mais qui représentent un travail considérable pour ceux qui les dressent; les machines et les règles à calcul, dont les premières coûtent souvent fort cher (1), et qui, en tout cas, ne s'appliquent qu'à des opérations générales, telles que la multiplication, la division, l'extraction des racines, etc.

Sans vouloir méconnaître l'intérêt qui s'attache à ces divers instruments de calcul, nous croyons pouvoir affirmer que c'est la méthode graphique qui constitue le moyen le plus pratique et le plus universel de supprimer la nécessité du calcul numérique. Encore convient-il de faire ici une distinction. La méthode graphique peut venir en aide au calculateur de deux manières absolument différentes.

Dans certains cas, les données étant prises sous forme d'éléments géométriques simples, segments de droites, angles, aires, etc., il

(1) Nous devons dire, cependant, qu'un ingénieur civil attaché à l'administration des Chemins de fer de l'État, M. Genaille, a construit divers appareils de calcul aussi simples qu'ingénieux, dont le prix de revient est insignifiant.

s'agit, *au moyen d'une construction*, d'en déduire les inconnues mises sous la même forme. On doit, en d'autres termes, exécuter une *épure*. A ce genre d'application appartiennent, en particulier, tous les procédés de la Statique graphique, et nous entendons par là non seulement ceux à qui cette dénomination est plus spécialement réservée et qui dérivent systématiquement des propriétés des polygones funiculaires, mais encore tous ceux qui se déduisent d'autres considérations géométriques, tels, par exemple, que M. Collignon en a fait connaître, et de si élégants, pour le problème de la poutre droite soumise à des charges discontinues, pour celui de l'arc parabolique surbaissé, etc.

Les épures ainsi substituées au calcul numérique sont, en général, fort simples, fort expéditives, et les ingénieurs accusent une tendance de plus en plus marquée à y recourir. Mais elles sont encore en dehors du sujet que nous avons en vue ici, et qui a trait à un autre mode d'application de la méthode graphique. Celle-ci peut, en effet, fournir la représentation sur un plan, au moyen de certains systèmes de courbes faciles à construire et construites une fois pour toutes, des équations qui lient entre elles les quantités soumises au calcul. De tels Tableaux graphiques, ou *abaques*, pour employer un terme que l'usage a aujourd'hui pleinement consacré, donnent les résultats à déduire de la formule à laquelle ils s'appliquent *par une simple lecture*. Ils suppriment donc, une fois construits, toute espèce d'opérations, et se trouvent ainsi réaliser l'idéal que nous définissions plus haut.

Leur exécution, il est vrai, représente un certain travail; mais celui-ci, qui est loin d'être aussi important qu'on pourrait le croire au premier abord, est, en tout cas, incomparablement plus simple et exige infiniment moins de temps que celui de la construction des Tables numériques [1], pour fournir les mêmes résultats que celles-ci dans le cas où elles sont réalisables, et s'étendre à une foule d'autres cas pour lesquels elles ne seraient pas pratiquement possibles, faute de se pouvoir prêter à plus de deux entrées.

---

[1] Il est assez difficile de chiffrer l'économie de temps résultant de la substitution d'un abaque au calcul d'une table numérique à double entrée. Notre expérience personnelle nous permet d'affirmer que, bien souvent, le rapport des temps employés dans l'un et l'autre cas, atteint celui de 1 à 20 et même davantage.

Il est bien évident d'ailleurs que la construction des abaques ne sera véritablement avantageuse que lorsqu'il s'agira de formules d'un usage fréquent. Mais celles-ci sont assez nombreuses pour attester la haute utilité pratique de la méthode et attirer sur elle l'attention des gens techniques en raison du profit, en quelque sorte permanent, qu'ils ont à en tirer.

Nous souhaiterions même que l'usage des abaques entrât assez dans leurs habitudes pour que les auteurs écrivant sur des sujets techniques fussent amenés, en faisant connaître quelque formule nouvelle applicable à un objet pratique, à en faire immédiatement la traduction sous forme d'abaque, de façon à donner mieux que la formule elle-même, à savoir les résultats auxquels elle doit conduire dans les cas où elle est applicable [1]. Il nous semble de même que le recueil des formules relatives à une certaine profession pourrait être avantageusement remplacé par l'atlas des abaques correspondants. Cette considération n'a pas été étrangère à la pensée qui nous a guidé dans la rédaction du présent Travail, dont nous faisons ressortir le but un peu plus loin.

Rappelons d'abord qu'il y a fort longtemps qu'on a songé à utiliser la méthode graphique en vue de la suppression du calcul numérique. L'*Arithmétique linéaire* de Pouchet, fondée sur cette idée, remonte à 1795. Nombre de travaux datant de la première moitié du siècle et dus à d'Obenheim, Bellencontre, Allix, s'en sont également inspirés. Terquem semble avoir, le premier, énoncé un principe général sur le sujet en faisant remarquer que la représentation graphique des équations à trois variables pouvait être identifiée à la représentation plane d'une surface topographique par les projections de ses courbes de niveau.

Depuis lors, M. Lalanne, en imaginant le principe de l'anamorphose qui lui permit d'apporter une grande simplification dans la construction de certains abaques d'un usage tout à fait courant, ouvrit une voie nouvelle, dans laquelle il fut suivi par de nombreux auteurs, notamment par MM. Collignon (formules d'Hydraulique),

---

(1) Ce vœu se trouve déjà réalisé dans divers Ouvrages ou Mémoires techniques, notamment dans le *Traité de Nivellement de haute précision* de M. Lallemand, qui fait partie de l'*Encyclopédie des Travaux publics*, dans la remarquable *Étude sur le desséchement des pays watringués*, de M. Crépin (*Annales des Ponts et Chaussées*, 6e série, t. I, p. 195; 1881), etc.

Chéry (formules de la résistance des matériaux), Massau, qui a énoncé le principe de l'anamorphose dans toute sa généralité, etc. Il est inutile de rappeler longuement les services rendus par les abaques construits par M. Lalanne, d'après son principe, pour le calcul des profils de terrassements, alors qu'étaient dressés les projets des lignes de notre grand réseau de chemins de fer.

Plus récemment, une application tout à fait remarquable des abaques, et d'abaques conçus d'après un principe nouveau, a été faite au Service du Nivellement général de la France, par M. l'Ingénieur des Mines Lallemand, chargé de diriger les opérations de cet important service. Grâce à ces abaques, dits *hexagonaux* (1), sur lesquels nous aurons occasion de nous étendre au cours de ce Travail, M. Lallemand est parvenu à faire faire en quelques minutes une besogne qui se répète journellement et qui absorbait auparavant tout le temps de certains employés attelés au travail ingrat et rebutant des calculs de correction.

Cette application seule des abaques suffirait à fixer sur eux l'attention de tous les hommes techniques qui, dans chaque spécialité, n'ont pas moins d'avantages à en attendre.

Ayant eu, pour notre part, fréquemment occasion d'y recourir, nous avons aussi rencontré divers procédés susceptibles, en certains cas, de faire naître de sérieuses simplifications. Nous nous sommes donc trouvé tout naturellement conduit à faire une étude comparative des diverses méthodes connues, de façon à essayer d'en faire saillir les traits généraux, et nous avons été ainsi amené à reconnaître, entre des méthodes en apparence assez dissemblables et tirées par leurs auteurs de points de départ tout différents, un lien qui les fait rentrer toutes dans un cadre commun et unifor-

(1) Sauf une Note très succincte présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CII, p. 816), M. Lallemand n'a pas encore livré au public l'exposé de sa Méthode, l'autographie qui en a été faite et que nous citons plus loin, dans la Note bibliographique, n'ayant pas été mise en vente. Néanmoins, ce savant ingénieur a bien voulu nous engager à donner dans le présent Ouvrage les principes encore inédits de sa Méthode. Nous tenons à lui en faire nos remerciements, et nous avons l'espoir que ce que nous disons ici de ses abaques hexagonaux donnera à nos lecteurs la curiosité de prendre connaissance, dès qu'elle paraîtra, de la publication détaillée qu'il compte leur consacrer. Il y a d'ailleurs lieu de noter que la façon dont nous présentons ces principes, qui dérive de notre méthode générale, diffère absolument de celle par laquelle leur auteur les a établis.

mément dériver de certains principes à la vérité bien simples et bien élémentaires.

C'est donc, à proprement parler, l'ensemble d'un petit corps de doctrine que nous avons constitué en des matières jusqu'ici assez éparses. Il serait plus exact de dire que ce n'est encore que l'ébauche d'un tel corps de doctrine. Mais, tel qu'il est, nous avons pensé qu'il y avait utilité à faire connaître le fruit de nos recherches, tant au point de vue didactique, pour mettre une certaine uniformité dans l'exposé des méthodes déjà connues et rendre par là leur assimilation plus aisée à ceux qui les abordent pour la première fois, qu'au point de vue pratique, pour faciliter l'extension et les applications ultérieures de ces méthodes.

Notre exposé se trouve naturellement complété par un certain nombre d'exemples. Nous avons généralement choisi ceux-ci moins pour leur importance propre qu'en raison des remarques particulières auxquelles ils pouvaient donner lieu sur l'application de la théorie.

Nous nous sommes néanmoins appliqué à les prendre dans la pratique courante, notamment dans celle du métier d'ingénieur (1).

Nous tenons encore à présenter une observation sur un point de méthode de l'exposé qui va suivre. La théorie des points isoplèthes qu'on trouvera plus loin (Chap. IV) et pour laquelle nous employons un système spécial de coordonnées tangentielles, les coordonnées parallèles, pourrait évidemment être faite en coordonnées cartésiennes ordinaires. Il suffirait, pour cela, au lieu de représenter le point par une équation en coordonnées parallèles dont les coefficients sont fonctions d'un certain paramètre, de le représenter par ses deux coordonnées cartésiennes, fonctions de ce paramètre. Mais, outre que l'emploi de ces coordonnées parallèles est aussi simple que possible, puisque toutes les notions qu'il exige tiennent en quelques lignes (n° 28), il a l'avantage, en

(1) Nous tenons aussi à dire que nous avons dû, par suite de nécessités typographiques, établir la plupart des abaques qui figurent dans cet Ouvrage à une échelle inférieure à celle qui serait adoptée dans la pratique en vue d'obtenir le degré d'approximation requis par les applications. Par la même occasion, nous adressons nos remerciements à M. le Conducteur des Ponts et Chaussées Guerche, pour le soin avec lequel il a dessiné les figures de cet Ouvrage.

établissant une corrélation parfaite entre la théorie des points isoplèthes et celle des droites isoplèthes, de rattacher celle-là comme celle-ci au principe fondamental par où débute cette étude et qui se trouve ainsi la dominer tout entière. Il n'en aurait pas été de même si la théorie des points isoplèthes avait été faite en coordonnées cartésiennes.

Nous ne supposons d'ailleurs, dans tout notre Travail, que l'emploi des coordonnées soit ponctuelles cartésiennes, soit tangentielles parallèles. Il est bien évident qu'on pourra, le cas échéant, en utiliser d'autres, et notamment celui des coordonnées polaires. Les principes de la méthode n'en seraient, pour cela, nullement modifiés.

Nous n'avons pas cru devoir nous arrêter spécialement au cas des équations à deux variables qui ne présente aucune notable particularité. Il suffit d'ailleurs, pour être ramené à ce cas, de supposer, dans le cas de trois variables, une de celles-ci remplacée par une constante.

Arrivé au terme de notre recherche, nous avons pensé qu'il y avait lieu de désigner, par une dénomination propre, le petit corps de doctrine spécial qu'elle avait mis en relief à nos yeux. Comme il s'agit, en somme, de la représentation graphique de la *loi* qui unit plusieurs quantités simultanément variables, loi dont ce qu'on appelle *équation* n'est que l'expression analytique, nous avons cru pouvoir adopter le terme de *nomographie* (νόμος, loi), inscrit en tête de cette étude.

Au point de vue philosophique, on peut faire un rapprochement entre la Nomographie et la Géométrie descriptive. L'un et l'autre de ces corps de doctrine ont pour but la mise en application de certains principes des Sciences mathématiques, sans l'intervention d'aucun autre principe étranger à ces Sciences, en vue de certains besoins absolument pratiques.

La Géométrie descriptive ramène au plan les faits de l'*espace*, la Nomographie ceux du *nombre*. L'une repose sur l'emploi de quelques propositions simples de Géométrie pure, l'autre sur quelques principes non moins élémentaires de Géométrie analytique.

Avril 1891.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

Nous n'avons aucunement la prétention de dresser ici une liste complète de la Bibliographie des abaques. Nous donnons simplement les titres des Ouvrages de langue française où se trouvent, à notre connaissance, traitées avec quelque généralité, plusieurs des parties que nous avons fondues en un seul corps dans le présent Ouvrage :

LALANNE. — *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique* (ANN. DES PONTS ET CHAUSSÉES, 1er sem.; 1846).

LALANNE. — *Méthodes graphiques pour l'expression des lois à trois variables.* Mémoire publié dans les NOTICES SUR LES MODÈLES, CARTES ET DESSINS RELATIFS AUX TRAVAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, RÉUNIS PAR LES SOINS DU MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS, à l'occasion de l'Exposition universelle de Paris, en 1878.

LALANNE. — *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables.* Ce Mémoire, qui ne diffère du précédent que par quelques points de détail, a été inséré dans l'Ouvrage de même titre que le précédent, qui a été publié à l'occasion de l'Exposition universelle de Melbourne, en 1880.

LALLEMAND. — *Les abaques hexagonaux.* Feuilles lithographiées en 1885 par les soins du Ministère des Travaux publics, pour les besoins du Service du nivellement général de la France, et non livrées au public.

MASSAU. — *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications* (Liv. III et IV). Publié dans les ANNALES DE L'ASSOCIATION DES INGÉNIEURS SORTIS DES ÉCOLES SPÉCIALES DE GAND, en 1884 et années suivantes. Les Livres I et II de ce Mémoire, qui ne traitent des abaques dans aucune de leurs parties, avaient paru en 1878.

FAVARO ET TERRIER. — *Leçons de Statique graphique* (T. II, Chap. V, VI, VII, et Notes additionnelles). Paris, Gauthier-Villars; 1885.

D'OCAGNE. — *Procédé nouveau de Calcul graphique* (ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES, 2e sem. 1884).

D'OCAGNE. — *Méthode de Calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles* (GÉNIE CIVIL, t. XVII, 1890).

NOMOGRAPHIE.

—

LES CALCULS USUELS

EFFECTUÉS AU MOYEN

DES ABAQUES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS NE CONTENANT PAS PLUS DE TROIS VARIABLES.

Principe fondamental. Définition des isoplèthes.

1. Considérons les équations de trois courbes renfermant chacune un paramètre arbitraire

$$(I_1) \qquad F_1(x, y, \alpha) = 0,$$

$$(I_2) \qquad F_2(x, y, \beta) = 0,$$

$$(I_3) \qquad F_3(x, y, \gamma) = 0.$$

A chaque valeur du paramètre α correspond, en vertu de (I_1), une courbe qui peut être désignée par cette valeur de α inscrite à côté de cette courbe. Pour rappeler que l'élément α a la même valeur tout le long d'une quelconque de ces courbes, celles-ci sont dites des *isoplèthes* (¹) pour l'élément α. Nous les désignerons ordinairement par la notation (α).

De même la variation de β dans (I_2) et celle de γ dans (I_3) fournissent des isoplèthes respectivement cotées au moyen des valeurs de β et de γ.

(¹) Terme proposé par l'auteur allemand Vogler et adopté par M. Lalanne.

Si nous éliminons x et y entre les équations (I_1), (I_2) et (I_3), nous obtenons la relation à laquelle doit satisfaire un système de valeurs de α, β, γ, pour que les isoplèthes correspondantes concourent en un même point. Cette relation peut s'écrire

$$(E) \qquad F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Il est donc permis de dire que le Tableau graphique ou *abaque*, formé par les trois systèmes de courbes cotées, qui viennent d'être définis, constitue une représentation de l'équation (E). Un tel abaque est représenté schématiquement par la *fig.* 1.

Fig. 1.

La liaison entre les valeurs de α, β, γ qu'établit cette équation se traduit sur l'abaque par le fait du croisement en un même point des courbes pourvues des cotes correspondantes. Par exemple, sur l'abaque de la *fig.* 1, pour $\alpha = 3$, $\beta = 4$, on aurait $\gamma = 2$.

Ici se placent deux remarques essentielles au point de vue de la construction des abaques.

1° Les accroissements successifs, généralement égaux, qu'on donnera à chaque paramètre pour engendrer un cours d'isoplèthes devront être assez petits pour que l'interpolation à vue qui se fera entre celles-ci atteigne le degré d'approximation voulu; il faudra, d'autre part, que le dessin soit fait à une échelle, telle que les isoplèthes répondant à ces valeurs successives du paramètre se dégagent nettement au regard.

2° On se rendra compte *a priori* du champ à l'intérieur duquel,

en pratique, reste comprise chacune des variables, afin de ne pas charger le Tableau de parties inutiles.

Outre donc la forme de l'équation à représenter, on devra connaître, dans chaque cas particulier, le *degré d'approximation* exigé et l'*amplitude de la variation* de chacune des quantités figurant dans l'équation.

L'abaque étant supposé satisfaire à la condition qui vient d'être énoncée, relativement au degré d'approximation obtenu par une interpolation visuelle, nous pourrons parler des courbes que l'œil intercale de lui-même entre celles qui sont effectivement tracées au même titre que de ces dernières.

Nous dirons, par suite, aussi bien pour les valeurs interpolées des variables que pour leurs valeurs cotées, que, si l'on se donne les valeurs de deux des variables α et β, on a la valeur correspondante de γ déterminée par l'équation (E), *en lisant la cote de l'isoplèthe* (γ) *qui passe par le point de croisement des isoplèthes* (α) *et* (β).

Méthode ordinaire.

2. Il est de toute évidence, étant donnée l'équation (E), qu'on peut choisir arbitrairement deux quelconques des trois premières équations, par exemple (I_1) et (I_2); (I_3) s'obtient alors en éliminant α et β entre ces équations et l'équation donnée (E). Toute la question se réduit, étant donnée cette dernière, à choisir judicieusement (I_1) et (I_2) pour que les courbes représentées par celles-ci, ainsi que celles données par l'équation (I_3) qui s'en déduit, soient aussi simples que possible.

On est tout d'abord amené à donner à (I_1) et (I_2) la forme la plus simple, en posant

$$(I'_1) \qquad x = \alpha,$$

$$(I'_2) \qquad y = \beta.$$

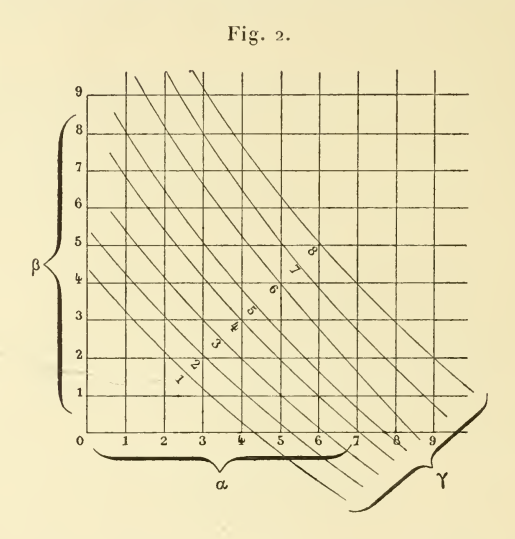
L'équation (I_3) devient, dans ce cas,

$$(I'_3) \qquad F_0(x, y, \gamma) = 0.$$

Cela revient à prendre deux des variables pour coordonnées courantes et la troisième comme paramètre arbitraire. C'est là le procédé qui se présente le plus naturellement à l'esprit et qui est

le plus couramment appliqué. Ici les isoplèthes (α) sont des parallèles équidistantes à l'axe des y, les isoplèthes (β) des parallèles équidistantes à l'axe des x. L'abaque se compose en somme des isoplèthes (γ) tracées sur une feuille quadrillée (*fig.* 2).

Fig. 2.



Ce mode de représentation ([1]) étant applicable à toutes les équations à trois variables, il aurait été bien inutile de le faire découler d'un principe plus général, si celui-ci ne devait, dans certains cas, conduire, par une particularisation différente, à des abaques de construction plus simple.

Principe de l'anamorphose.

3. Prenons, par exemple, une équation de la forme

$$(\mathrm{E}'') \qquad f(\alpha)\psi_1(\gamma)+\varphi(\beta)\psi_2(\gamma)+\psi_3(\gamma)=0.$$

Ici nous prendrons pour équations (I_1) et (I_2)

$$(\mathrm{I}''_1) \qquad x=f(\alpha),$$

$$(\mathrm{I}''_2) \qquad y=\varphi(\beta).$$

([1]) Les applications connues en sont des plus nombreuses. Nous citerons, en particulier, pour le soin avec lequel ils ont été dressés, les excellents Tableaux graphiques sur les questions d'intérêts et de finances de M. Eugène Pereire.

L'équation (I_3) obtenue, comme nous l'avons dit plus haut, par élimination de α et β entre (I_1), (I_2) et (E), est ici

$$(I''_3) \qquad x\psi_1(\gamma)+y\psi_2(\gamma)+\psi_3(\gamma)=0.$$

Les isoplèthes (α) et (β) sont donc encore des parallèles aux axes, mais cette fois, non plus équidistantes, et les isoplèthes (γ) sont aussi des droites, tangentes à une certaine courbe dont l'équation, si on la désirait, s'obtiendrait, comme on sait, en éliminant γ entre l'équation (I''_3) et sa dérivée prise par rapport à γ.

C'est la substitution de ces droites (γ) aux courbes que donnerait l'application de la méthode ordinaire qui constitue le *principe de l'anamorphose* de M. Lalanne. Cette façon de l'établir montre immédiatement qu'il n'est qu'un cas particulier de celui qui va être maintenant indiqué.

Généralisation du principe de l'anamorphose.

4. Cherchons la forme générale des équations représentables par trois cours d'isoplèthes rectilignes. Dans cette hypothèse, les équations (I_1), (I_2) et (I_3) devant être du premier degré en x et y pourront s'écrire

$$(I'''_1) \qquad xf_1(\alpha)+yf_2(\alpha)+f_3(\alpha)=0,$$

$$(I'''_2) \qquad x\varphi_1(\beta)+y\varphi_2(\beta)+\varphi_3(\beta)=0.$$

$$(I'''_3) \qquad x\psi_1(\gamma)+y\psi_2(\gamma)+\psi_3(\gamma)=0,$$

La forme de l'équation (E) correspondante, obtenue par élimination de x et y, peut s'écrire immédiatement sous forme de déterminant

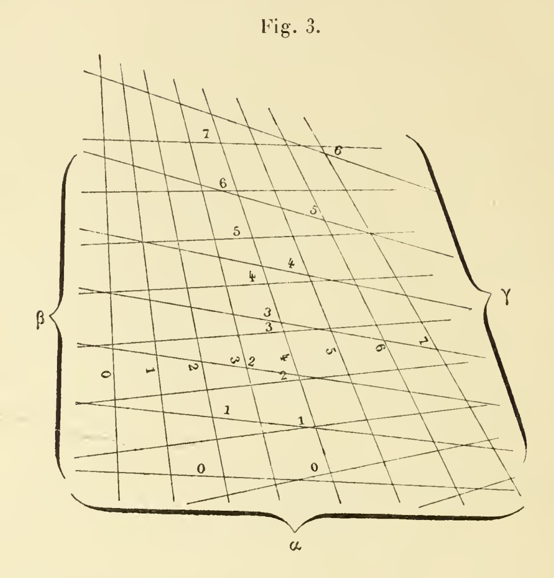
$$(E''') \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha) & f_2(\alpha) & f_3(\alpha) \\ \varphi_1(\beta) & \varphi_2(\beta) & \varphi_3(\beta) \\ \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \psi_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

La disposition générale des abaques correspondants est représentée schématiquement par la *fig.* 3.

Il n'est pas toujours facile, sans quelques tâtonnements, de voir si une équation donnée entre trois variables peut se mettre sous

cette forme ([1]). Voici un cas, assez fréquent dans la pratique, où la vérification se fait très facilement : c'est celui où l'équation

Fig. 3.



donnée se présente sous la forme

$$(E^{IV}) \qquad \chi_1(\alpha, \beta)\psi_1(\gamma) + \chi_2(\alpha, \beta)\psi_2(\gamma) + \chi_3(\alpha, \beta)\psi_3(\gamma) = 0.$$

Il suffit alors de poser

$$(A) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\chi_1(\alpha, \beta)}{\chi_3(\alpha, \beta)}, \\ y = \dfrac{\chi_2(\alpha, \beta)}{\chi_3(\alpha, \beta)}, \end{cases}$$

([1]) Le caractère commun à toutes les équations susceptibles de revêtir la forme (E^{III}) se traduirait par une équation aux dérivées partielles obtenue par l'élimination des fonctions arbitraires qui entrent dans cette forme. Ces fonctions sont au nombre de six (car on ne doit, dans chaque ligne du déterminant, considérer comme arbitraires que les rapports de deux des éléments au troisième) et le problème d'Analyse consistant à les éliminer ne manquerait pas d'une certaine complication. Ce problème a été complètement résolu, et d'une manière fort élégante, par M. l'Ingénieur des Mines Lecornu (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CII, p. 815), dans le cas où la forme (E^{III}) se réduit à (E^{II}). M. Lecornu a non seulement éliminé les quatre fonctions arbitraires que renferme (E^{II}), mais encore indiqué la façon dont elles peuvent se déterminer lorsqu'on a vérifié que l'équation proposée peut se mettre sous cette forme.

et d'éliminer successivement β et α entre ces équations. Si les résultants de ces éliminations sont du premier degré en x et y,

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} (\mathrm{I}_1^{\mathrm{iv}}) & x f_1(\alpha)+y f_2(\alpha)+f_3(\alpha)=0, \\ (\mathrm{I}_2^{\mathrm{iv}}) & x \varphi_1(\beta)+y \varphi_2(\beta)+\varphi_3(\beta)=0, \end{cases}$$

on prendra ces équations pour (I_1) et (I_2); (I_3) s'obtiendra en éliminant α et β entre ces équations et $(\mathrm{E}^{\mathrm{iv}})$, et comme le système (B) est équivalent au système (A), le résultat de cette élimination sera

$$(\mathrm{I}_3^{\mathrm{iv}})\qquad x\psi_1(\gamma)+y\psi_2(\gamma)+\psi_3(\gamma)=0.$$

L'équation $(\mathrm{E}^{\mathrm{iv}})$ sera donc alors représentable par trois cours d'isoplèthes rectilignes.

Triple réglure.

5. Il nous sera nécessaire d'adopter une dénomination spéciale abrégée pour les équations représentables par trois cours d'isoplèthes rectilignes, c'est-à-dire rentrant dans le type général $(\mathrm{E}^{\mathrm{III}})$. Nous proposerons le terme d'*équations à triple réglure* qui évoque bien l'idée de la propriété sus-indiquée.

Isoplèthes circulaires.

6. Remarquons en passant que, pour certaines formes de l'équation (E), une ou plusieurs des équations (I_1), (I_2) et (I_3) pourront être choisies de façon à représenter des cercles. On aura ainsi la représentation, au moyen d'isoplèthes circulaires, aussi faciles à construire que des droites, de certaines équations non à triple réglure. On en trouvera plus loin (nº 16) un exemple remarquable.

Échelles binaires à parallèles.

7. Soit une fonction de deux variables $\varphi(\beta, \gamma)$; on peut toujours construire un abaque sur lequel ses valeurs soient données par des *segments proportionnels*, déterminés sur un axe par des parallèles à un autre axe. Posons, en effet,

$$\varphi(\beta, \gamma)=\alpha$$

et représentons cette dernière équation par un abaque ainsi qu'il a été dit au n° 2 (*fig.* 2), c'est-à-dire en prenant comme premier cours d'isoplèthes [éq. (I_1)]

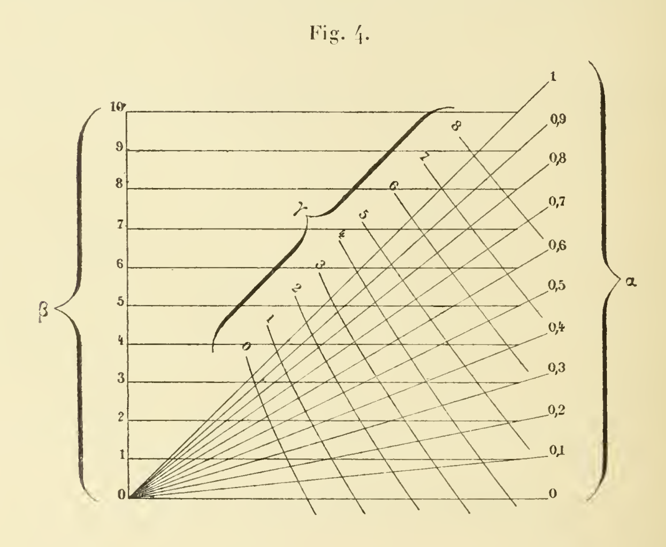
$$x = \alpha.$$

Dans ces conditions, la parallèle à l'axe des y, menée par le point de croisement des isoplèthes (β) et (γ), détermine sur l'axe des x un segment qui donne, à l'échelle de la figure, la valeur correspondante de $\varphi(\beta, \gamma)$. Aussi l'abaque ainsi construit est-il dit une *échelle binaire à parallèles* de la fonction $\varphi(\beta, \gamma)$. On verra, au Chap. V, le parti que M. Lallemand a su tirer de l'emploi de ces échelles binaires, dont il semble avoir été le premier à se servir systématiquement.

Échelles binaires à radiantes.

8. On peut encore avoir les valeurs de $\varphi(\beta, \gamma)$ par les coeffi-

Fig. 4.



cients angulaires de droites issues de l'origine. Il suffit pour cela, après avoir posé comme précédemment

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma),$$

de construire l'abaque (*fig.* 4) de cette dernière équation en pre-

nant comme premier cours d'isoplèthes [éq. (I_1)]

$$y = \alpha x.$$

Dans ces conditions la droite joignant l'origine au point de croisement des isoplèthes (β) et (γ) a pour coefficient angulaire $\varphi(\beta, \gamma)$; on a ainsi une *échelle binaire à radiantes* de la fonction $\varphi(\beta, \gamma)$. Ces échelles ont été également imaginées par M. Lallemand.

Échelles binaires anamorphosées.

9. En général, dans ce cas, comme dans le précédent, on prendra comme second système d'isoplèthes des parallèles équidistantes à un des axes, en adoptant pour équation (I_2)

$$y = \beta.$$

On pourra néanmoins choisir autrement le second cours d'isoplèthes, de façon à n'avoir pour isoplèthes que des droites quand la forme de la fonction $\varphi(\beta, \gamma)$ s'y prêtera.

Ainsi, dans le cas du n° 7, si l'équation donnée a la forme

$$\alpha = \varphi(\beta)\psi_1(\gamma) + \psi_2(\gamma),$$

on prendra évidemment comme équation (I_2)

$$y = \varphi(\beta),$$

parce qu'alors, l'équation (I_1) étant

$$x = \alpha,$$

il viendra pour l'équation (I_3)

$$x = y\psi_1(\gamma) + \psi_2(\gamma)$$

qui représente des droites.

De même dans le cas du n° 8, si l'équation donnée a encore la forme

$$\alpha = \varphi(\beta)\psi_1(\gamma) + \psi_2(\gamma),$$

on prendra comme équation (I_2)

$$x = \frac{1}{\varphi(\beta)},$$

parce qu'alors l'équation (I_3) sera

$$y = \psi_1(\gamma) + x\psi_2(\gamma).$$

On a ainsi des *échelles binaires anamorphosées*.

avait immédiatement les valeurs de celles-ci en fractions de temps au moyen du cercle horaire dessiné sur la figure. On peut de même, au lieu de coter les isoplèthes D par la valeur de la déclinaison, les coter au moyen de l'époque correspondante de l'année.

Il n'y a, dès lors, qu'à suivre l'horizontale passant par le point de rencontre de la verticale correspondant à la latitude et de la radiante correspondant à l'époque de l'année pour lire sur le cercle horaire les heures de lever et de coucher du Soleil.

2° *Abaque du poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air.* — Soit à mettre en abaque la formule qui donne le poids en grammes de vapeur d'eau contenue dans un mètre cube d'air en fonction des indications de l'hygromètre à condensation [1]. Cette formule est

$$p = \frac{0,81}{760}\,\frac{f}{1 + 0,00366\,t} = \frac{kf}{a + bt},$$

f étant la tension de la vapeur d'eau, t la température.

On n'aura qu'à prendre comme équations (I_1) et (I_2)

$$x = kf \quad \text{(parallèles équidistantes à l'axe des } y\text{)},$$
$$y = a + bt \quad \text{(parallèles équidistantes à l'axe des } x\text{)}.$$

L'équation (I_3) sera dès lors

$$\frac{x}{y} = p \quad \text{(droite émanant de l'origine)}.$$

La construction de cet abaque ne présenterait donc aucune particularité, sans cette circonstance que f n'est pas donné directement. La donnée que fournit l'hygromètre est la température t' pour laquelle la tension f devient maximum. Supposons alors construite, sur l'abaque même, au moyen des tables de Regnault, la courbe qui donne kf en fonction de t', l'échelle des températures étant d'ailleurs confondue avec celle déjà construite pour t. Nous n'avons plus, pour avoir la parallèle à l'axe des y de cote f, qu'à prendre celle de ces parallèles qui passe par le point de la courbe dont l'ordonnée est t'.

---

[1] Nous avons eu à construire cet abaque, en 1886, pour la Direction de l'Artillerie du port de Rochefort, en vue de certaines observations à faire plusieurs fois par jour dans les poudrières.

On ne construira d'ailleurs du tableau que la partie (*Pl. I*) répondant à l'amplitude de variation pratique des quantités p, f, t.

L'emploi de l'abaque se réduit dès lors à ceci : on prend le point de la courbe correspondant à la température t'; puis le point de rencontre de la parallèle à Oy menée par ce point et de la parallèle à Ox répondant à la température t; la cote de la radiante passant par ce dernier point est le poids p cherché.

On peut se dispenser de tracer les parallèles à Oy, il suffit pour cela d'avoir un transparent sur lequel sont tracés deux axes rectangulaires. On n'a dès lors qu'à placer l'un de ces axes sur le bord inférieur AB de l'abaque de façon que le second passe par le point de la courbe des tensions répondant à la température t', et de suivre celui-ci jusqu'à l'horizontale de la température t. Il n'y a plus ensuite qu'à lire la cote de la radiante passant par le point ainsi obtenu.

Par exemple, pour $t = 30°$, $t' = 16°$, l'axe vertical du transparent occupant la position marquée en pointillé sur la *Pl. I*, on a $p = 13^{gr}$.

Abaque de l'équation trinôme du troisième degré.

15. Prenons encore l'équation

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Ici, il est tout naturel de prendre comme équations (I_1) et (I_2)

$$x = p,$$
$$y = q.$$

Alors l'équation (I_3) est

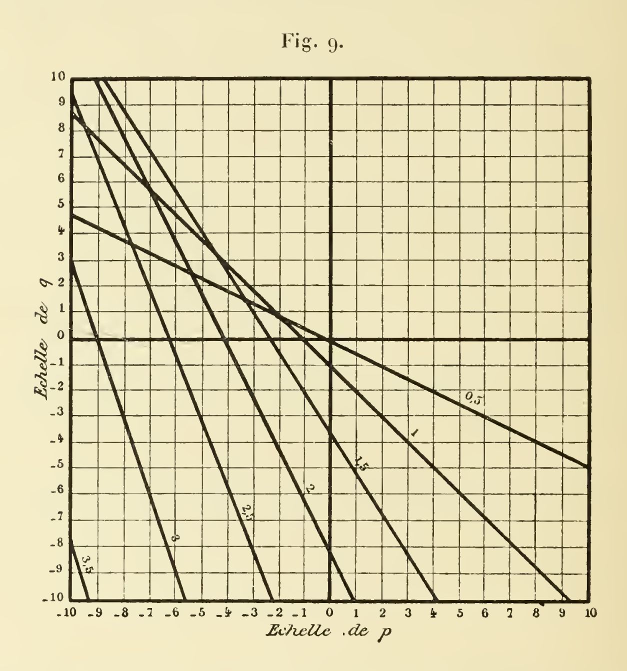
$$z^3 + zx + y = 0,$$

qui représente des droites. On obtient ainsi l'abaque bien connu de M. Lalanne (*fig.* 9); remarquons toutefois qu'on peut se borner à ne construire que la moitié de celui-ci, en ne considérant que les valeurs positives de z. Cela revient à construire un abaque qui ne donne que les *racines positives* de l'équation trinôme cubique. On n'a, en pratique, généralement besoin que de celles-là. Si l'on veut avoir les racines négatives, on n'a qu'à les calculer comme racines

positives de la transformée en $-x$, qui s'obtient par le simple changement de q en $-q$.

Nous venons de dire : *en pratique*. Les équations de ce type se rencontrent, en effet, dans certaines questions pratiques, notamment dans le calcul des grands barrages en maçonnerie par la belle

Fig. 9.



méthode de M. Delocre. Celle-ci va nous conduire à une remarque qui a son intérêt.

x étant la hauteur en mètres sur laquelle les parois du barrage peuvent être maintenues verticales à partir du couronnement,
a la largeur en mètres au couronnement,
λ le rapport de la pression limite admissible par mètre carré au poids d'un mètre cube de maçonnerie,
θ le rapport du poids d'un mètre cube d'eau à celui d'un mètre cube de maçonnerie,

la formule de M. Delocre est

$$x^3 + \frac{a^2}{\theta} x - \lambda \frac{a^2}{\theta} = 0,$$

lorsque

$$\frac{a^2}{\theta} > \frac{\lambda^2}{4} \quad (^1).$$

Prenons

$$\theta = \frac{1}{2}, \qquad a = 10, \qquad \lambda = 20.$$

auquel cas

$$\frac{a^2}{\theta} = 200, \qquad \frac{\lambda^2}{4} = 100,$$

ce qui montre que la formule est applicable. Celle-ci devient

$$x^3 + 200x - 4000 = 0.$$

La grandeur des coefficients fait qu'elle échappe à l'application de l'abaque où nous supposons, par exemple, les axes gradués de -10 à $+10$ (ce qui suffit pour la plupart des cas de la pratique). Mais, si nous posons $x = 10x_1$ (ce qui revient à exprimer la hauteur cherchée en décamètres), l'équation devient

$$x_1^3 + 2x_1 - 4 = 0.$$

Elle rentre alors dans les limites de l'abaque qui donne (à une échelle quintuple de celle de la *fig.* 9) $x_1 = 1,18$, et, par suite, $x = 11^m,80$. Si nous avons insisté sur ce point de détail, c'est qu'on a souvent occasion de recourir à des moyens analogues, c'est-à-dire à des changements d'unités pour les quantités soumises au calcul, de façon à ramener les nombres qui les expriment dans les limites de la graduation de l'abaque.

Abaque des murs de soutènement pour un massif de terre profilé suivant son talus naturel.

16. Voici maintenant un exemple inédit d'emploi des isoplèthes circulaires.

(¹) Dans son Mémoire, ce savant ingénieur dit qu'on doit faire usage de l'une ou l'autre des formules

$$\left.\begin{aligned} & x^3 + \frac{a^2}{\theta}x - \lambda\frac{a^2}{\theta} = 0, \\ & x^2 + \frac{4a^2}{\theta\lambda}x - \frac{3a^2}{\theta} = 0, \end{aligned}\right\} \text{ suivant que } \left\{\begin{aligned} & \frac{a^2}{\theta} > x^2, \\ & \frac{a^2}{\theta} < x^2. \end{aligned}\right.$$

Nous avons démontré (*Annales des Ponts et Chaussées*, p. 443; mars 1891) que ces conditions pouvaient être remplacées par $\frac{a^2}{\theta} > \frac{\lambda^2}{4}$ et $\frac{a^2}{\theta} < \frac{\lambda^2}{4}$. [Nous rétablissons ici le sens des inégalités qui est fautif à l'endroit cité].

Supposons qu'un mur en maçonnerie à section rectangulaire soutienne un massif de terre profilé suivant son talus naturel. Le rapport K de la base à la hauteur de la section du mur est donné (voir *Résistance des matériaux*, de Collignon, 3e édition, p. 669) par

$$K = mk,$$

m étant le coefficient de stabilité qu'on prend généralement entre $\frac{4}{3}$ et 2, k une quantité déterminée par la formule

$$k^2 + kp \sin\varphi \cos\varphi - \frac{p}{3} \cos^2\varphi = 0,$$

où p est le rapport du poids du mètre cube de terre à celui du mètre cube de maçonnerie, φ l'angle du talus des terres avec l'horizon.

Cherchons à construire l'abaque de cette dernière équation.

La méthode ordinaire du n° 2 conduirait à une série d'hyperboles. En outre, l'équation, ne pouvant être ramenée au type (E''') (n° 4) des équations à triple réglure, ne saurait être représentée par trois systèmes d'isoplèthes rectilignes.

Nous allons faire voir qu'elle est représentable par deux systèmes d'isoplèthes rectilignes et un d'isoplèthes circulaires.

Posons, en effet,

$$y = p \sin\varphi \cos\varphi, \qquad x = p \cos^2\varphi$$

et éliminons successivement entre ces équations p et φ; il vient

$$(I_1) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi$$

et

$$(I_2) \qquad x^2 + y^2 - px = 0.$$

Si nous prenons ces équations pour équations (I_1) et (I_2) (n° 1), l'équation (I_3), obtenue en portant dans l'équation proposée les valeurs de x et de y tirées de là, qui sont celles écrites ci-dessus, sera

$$(I_3) \qquad k^2 + ky - \frac{x}{3} = 0.$$

On voit que les isoplèthes (φ) et (k), fournies respectivement

par les équations (I_1) et (I_3), sont des droites, les isoplèthes (p) fournies par l'équation (I_2), des cercles.

Toutes ces isoplèthes sont extrêmement simples à construire. Pour des valeurs particulières de φ, de p et de k : 1° l'isoplèthe (φ) est la droite issue de l'origine, qui fait avec l'axe des x l'angle φ; 2° l'isoplèthe (p) est le cercle de rayon p touchant l'axe des y à l'origine, dont le centre est, par suite, situé sur l'axe des x; 3° l'isoplèthe (k) est la droite coupant l'axe des y au point dont l'ordonnée est $-k$, et ayant un coefficient angulaire égal à $\frac{1}{3k}$.

L'abaque ainsi obtenu (*Pl. IV*) se construit très rapidement. On le limite à la portion correspondant aux limites de variation pratique des quantités p (de 0,4 à 1) et φ (de 20° à 50°) [1]. A titre d'exemple, pour $p = 0,65$, $\varphi = 45°$, on a $k = 0,24$.

Nous avons tracé les isoplèthes (φ) en pointillé, parce qu'on peut se dispenser de les tracer sur l'abaque. Si, en effet, on marque sur le cercle extérieur de l'abaque la graduation correspondant à φ, il suffit de tendre un fil entre l'origine et le point φ de cette graduation pour remplacer la droite non tracée. Cette manière de faire est même préférable au point de vue de la précision de l'interpolation.

---

[1] La partie utile de l'abaque a été disposée dans le cadre de la *Pl. IV* de façon que l'isoplèthe $\varphi = 20°$ soit parallèle au bord inférieur de ce cadre. L'axe des x, qui passe d'ailleurs par le point de convergence des isoplèthes (φ), ferait donc un angle de 20° avec le bord inférieur du cadre, en dessous de ce bord.

bien simple permet de maintenir intacte l'orientation d'un des axes de l'indicateur et, par suite, celle des deux autres. La *fig.* 11, où l'on a pointillé les axes de l'indicateur, pour une de ses positions, montre l'aspect général de l'abaque ainsi obtenu.

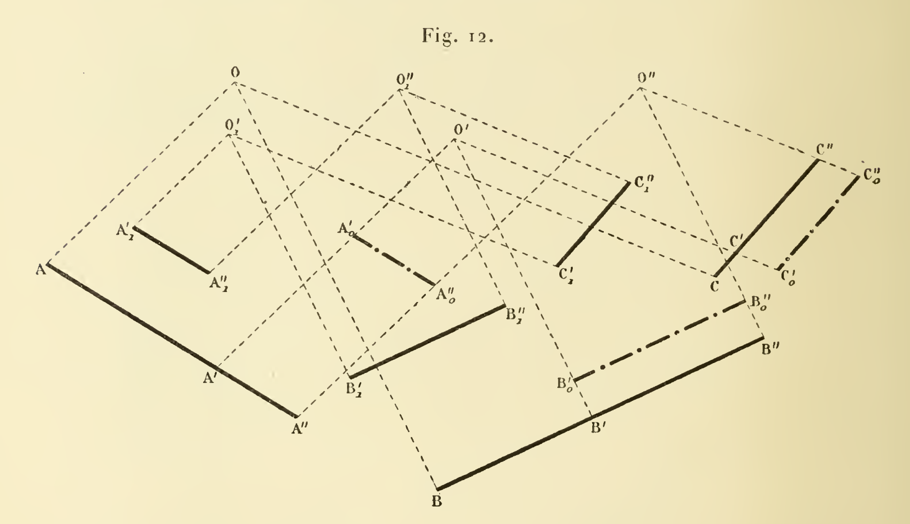
Déplacement et fractionnement des échelles.

19. M. Lallemand a fait remarquer qu'un tel abaque présente la précieuse propriété du fractionnement. Voici en quoi consiste celle-ci :

Observons d'abord que les échelles linéaires définies au numéro précédent peuvent être déplacées, en conservant leur direction, suivant le sens de l'axe correspondant de l'indicateur. Cette opération peut même n'être pratiquée que pour une de leurs parties seulement.

Ainsi, soient (*fig.* 12) AA'', BB'', CC'' les échelles données, les

Fig. 12.



points A, B, C, d'une part, A'', B'', C'', de l'autre, étant des points correspondants. O et O'' sont les positions correspondantes du centre de l'indicateur.

Prenons trois points correspondants intermédiaires A', B', C', pour lesquels le centre de l'indicateur est en O'. Nous pouvons reporter les fragments d'échelles $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ en $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$,

$C'_0 C''_0$, puis déplacer toute la figure $O'O''A'_0A''_0B'_0B''_0C'_0C''_0$, *en conservant son orientation* en $O'_1 O''_1 A'_1 \ldots C''_1$. Cette nouvelle figure, jointe à la partie restante des anciennes échelles, équivaut exactement à l'ancien abaque, tout en occupant une place beaucoup plus restreinte. De là l'utilité du fractionnement qui permet, répété autant de fois qu'il est nécessaire, de condenser l'abaque dans un espace aussi restreint qu'on veut.

Il suffit de réfléchir un instant pour s'apercevoir que ce procédé permet de faire tenir l'abaque de toute équation à triple réglure parallèle, à l'intérieur d'un triangle donné.

Il y a lieu de remarquer qu'on est libre, à chaque fractionnement, de prendre arbitrairement deux des nouvelles origines A'_1 et B'_1. La troisième, C'_1, doit alors se trouver sur le troisième axe de l'indicateur lorsque les deux premiers ont été amenés respectivement sur A'_1 et B'_1.

Forme des équations à triple réglure parallèle.

20. Voyons quelle est la forme générale des équations ainsi représentables, c'est-à-dire à triple réglure parallèle.

Chacun des cours d'isoplèthes étant engendré par une droite de direction constante, les équations (I_1), (I_2), (I_3) sont ici

$$y = mx + f_1(\alpha),$$
$$y = m'x + \varphi_1(\beta),$$
$$y = m''x + \psi_1(\gamma).$$

Éliminons x et y entre ces équations. Nous avons, pour l'équation en α, β, γ,

$$(m''-m')f_1(\alpha)+(m-m'')\varphi_1(\beta)+(m'-m)\psi_1(\gamma)=0;$$

c'est-à-dire, puisque m, m', m'' sont des constantes, que la forme cherchée peut s'écrire

$$\psi(\gamma)=f(\alpha)+\varphi(\beta).$$

Il est tout naturel, pour représenter une telle équation, de poser pour équations (I_1) et (I_2)

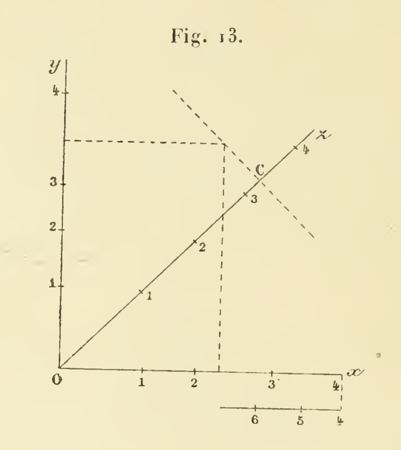
(I_1) $$x = f(\alpha),$$
(I_2) $$y = \varphi(\beta).$$

Il vient alors pour équation (I_3)

$$(I_3) \qquad x + y = \psi(\gamma).$$

Les isoplèthes (α) sont des parallèles à Oy, les isoplèthes (β) des parallèles à Ox, les isoplèthes (γ) des parallèles à la bissectrice de l'angle extérieur des axes Ox et Oy. Nous remplacerons chacun de ces cours d'isoplèthes par des échelles transversales, ainsi qu'il a été expliqué au n° 18. Pour le premier (*fig.* 13), nous choisirons

Fig. 13.



naturellement l'axe des x dont la graduation, d'après l'équation (I_1), s'obtiendra en inscrivant les cotes 0, 1, 2, ... à l'extrémité des abscisses $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Pour le deuxième, ce sera l'axe des y portant les graduations 0, 1, 2, ... aux extrémités des ordonnées $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... Pour le troisième, nous prendrons comme support de l'échelle la bissectrice Oz de l'angle intérieur des axes xOy. Voyons comment s'effectuera la graduation de cette échelle. Si l'isoplèthe (γ) la coupe au point C, les coordonnées de celui-ci étant $x = y = \dfrac{OC}{\sqrt{2}}$, l'équation ($I_3$) donne

$$OC\sqrt{2} = \psi(\gamma)$$

ou

$$OC = \frac{\psi(\gamma)}{\sqrt{2}}.$$

La graduation de l'échelle Oz est ainsi définie.

Nous pourrons d'ailleurs user de la faculté que nous avons de fractionner et de déplacer les échelles, ainsi qu'il a été dit au n° 19.

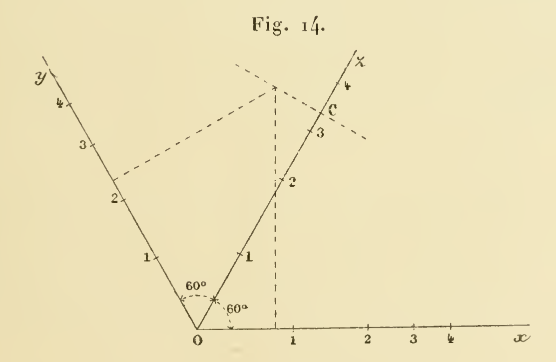
En particulier, si une des fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\psi(\gamma)$ croît jusqu'à une certaine valeur de la variable pour décroître ensuite, afin d'éviter que l'échelle ne revienne sur elle-même à partir du point de celle-ci correspondant au maximum, on reportera l'échelle sur un support parallèle au premier. Ainsi, sur la *fig.* 13, on a supposé que la fonction $f(\alpha)$, croissante jusqu'à $\alpha = 4$, décroissait à partir de là.

On pourra aussi prendre sur Ox et Oy, pour les échelles de α et de β, des origines autres que O. Il suffira, d'après ce qui a été vu au n° 19, dernier alinéa, que l'origine sur Oz soit telle que les trois origines soient des points correspondants, c'est-à-dire des points sur lesquels se placent respectivement et simultanément les trois axes de l'indicateur.

Principe des abaques hexagonaux.

21. M. Lallemand, afin d'avoir sur Oz les valeurs de $\psi(\gamma)$ à la même échelle que celles de $f(\alpha)$ et de $\varphi(\beta)$ sur Ox et Oy, a eu la très heureuse idée de prendre les axes Ox, Oy faisant entre eux un angle de 120°. En effet, les axes Ox et Oy continuant à être

Fig. 14.



gradués en segments proportionnels aux valeurs de $f(\alpha)$ et de $\varphi(\beta)$, cherchons quelle sera la graduation de Oz. Les équations (I_1), (I_2) et (I_3) sont les mêmes qu'au numéro précédent, les coordonnées étant ici les distances à l'origine O des pieds des perpendiculaires abaissées du point considéré sur les axes Ox et Oy. L'isoplèthe (γ), ayant pour équation

$$x + y = \psi(\gamma),$$

si elle coupe Oz au point C (*fig.* 14), les coordonnées de ce point étant $x = y = \frac{OC}{2}$, on a

$$2\frac{OC}{2} = OC = \psi(\gamma).$$

L'axe Oz se trouve donc gradué en segments proportionnels aux valeurs de $\psi(\gamma)$, l'échelle étant la même que pour les axes Ox et Oy.

On voit que la propriété précédente peut s'énoncer ainsi : *La projection d'un segment de droite sur la bissectrice d'un angle de* 120° *est égale à la somme des projections de ce segment sur les côtés de cet angle.*

C'est en réalité cette propriété, d'ailleurs bien facile à démontrer directement, puisqu'elle résulte de l'identité trigonométrique

$$\cos(\omega + 60^\circ) + \cos(60^\circ - \omega) = 2\cos 60^\circ \cos\omega = \cos\omega,$$

que M. Lallemand a prise comme point de départ de la théorie de ses abaques.

Il nous a paru préférable, au point de vue d'un exposé d'ensemble, d'adopter la marche précédente, qui a l'avantage de rattacher les abaques du système Lallemand au principe fondamental que nous avons pris comme point de départ et d'où l'on peut considérer que découle la théorie de tous les abaques, sans distinction de genre.

Ici encore nous ferons observer, comme au numéro précédent, que, par application de ce qui a été dit au n° 19, on peut déplacer et fractionner les échelles de façon à donner à l'abaque la disposition la plus avantageuse. C'est même pour ce cas spécial que M. Lallemand a imaginé cet artifice, auquel notre exposé du n° 19 a donné un peu plus de généralité.

Les abaques ainsi construits ont reçu le nom d'*abaques hexagonaux,* en raison de ce que les échelles d'une part, les axes de l'indicateur de l'autre, sont parallèles aux diagonales d'un hexagone régulier.

22. Il est à peine besoin d'ajouter que, si l'équation proposée a la forme

$$\psi(\gamma) = f(\alpha)\,\varphi(\beta),$$

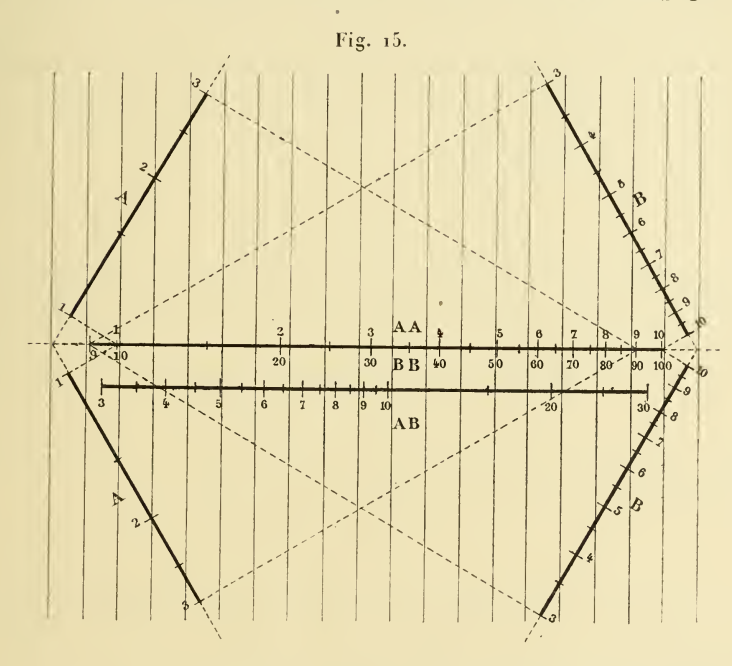
on l'amène à la forme requise pour l'application du procédé en prenant les logarithmes des deux membres, ce qui donne

$$\log\psi(\gamma) = \log f(\alpha) + \log\varphi(\beta).$$

Abaque hexagonal de multiplication et de division.

23. Comme exemple d'application ([1]), voici, dans le système de M. Lallemand, l'abaque de multiplication et de division (*fig.* 15)

Fig. 15.



équivalent à l'abaque Lalanne du n° 12, c'est-à-dire traduisant l'équation

$$\log\gamma = \log\alpha + \log\beta.$$

([1]) Les abaques construits par M. Lallemand, dans son système, sont fort nombreux et s'appliquent à des formules d'un usage journalier intéressant principalement le Service du Nivellement général de la France. Ne pouvant, dans le présent exposé de principes, multiplier outre mesure les exemples, nous ne mentionnons qu'un nombre restreint de ces abaques. Le lecteur en trouvera d'autres dans les Ouvrages suivants :

LALLEMAND, *Nivellement de haute précision* (*Encycl. des Trav. publics*).

LALLEMAND, Annexe II à la *Notice sur le Nivellement général de la France*

Les échelles α et β ont été fractionnées au point coté 3. Les portions conservées de ces échelles étant désignées par la lettre A, leurs prolongements ont été transportés dans les positions désignées par la lettre B, l'échelle B supérieure prolongeant l'échelle A inférieure, et inversement.

Le point de l'échelle γ correspondant au point de fractionnement des deux premières échelles, c'est-à-dire le point 9, se trouve ramené dans la position qu'il occupe sur l'échelle BB.

Il suffit de choisir celle-ci *a priori*, de façon que le point 10 de l'échelle BB coïncide avec le point 1 de l'échelle AA pour que ces deux échelles coïncident dans toute leur étendue, les cotes de la première se déduisant de celles de la seconde au moyen d'une simple multiplication par 10, c'est-à-dire par la seule adjonction d'un zéro. Cela résulte de ce que

$$\log(10 \times a) = \log 10 + \log a.$$

On peut aussi tracer l'échelle AB pour le cas où l'on accouplerait un point d'une des échelles A avec un point d'une des échelles B.

Échelles centrales additionnelles.

24. Supposons qu'une quantité γ soit donnée en fonction de deux autres, α et β, par une équation de la forme

$$\gamma = f(\alpha)\varphi(\beta) + F(\alpha, \beta)$$

le terme $F(\alpha, \beta)$ ne devant d'ailleurs figurer dans le second membre que lorsque α et β sont compris entre certaines limites, et étant dit, pour cette raison, *terme complémentaire*.

Décomposons alors la valeur de γ en deux parties, γ' et γ'', telles que

$$\gamma' = f(\alpha)\,\varphi(\beta), \qquad \gamma'' = F(\alpha, \beta).$$

(*Notices* publiées par le Ministère des Travaux publics, à l'occasion de l'Exposition universelle de 1889. Volume : *Mines, Documents divers*, p. 308).

Collet, *Traité théorique et pratique de la régulation et de la compensation des compas*. Paris, Challamel.

Ajoutons que, pour la construction de ces abaques, M. Lallemand a été très habilement secondé par les dessinateurs de son service, notamment par MM. Prévot et Renard.

Nous pourrons construire séparément les abaques de ces deux équations. Il nous suffira, dès lors, les valeurs de γ' et de γ'' nous étant fournies par ceux-ci, de faire la somme des résultats ainsi obtenus.

La première de ces équations, qu'on peut écrire

$$\log \gamma' = \log f(\alpha) + \log \varphi(\beta),$$

étant à triple réglure parallèle, donnera lieu à un abaque hexagonal, c'est-à-dire (les axes étant inclinés à 120° l'un sur l'autre, et les coordonnées étant supposées être les distances à l'origine des pieds des perpendiculaires abaissées des points du plan sur les axes) qu'on prendra, pour la représenter, comme isoplèthes (I_1) et (I_2),

$$x = \log f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad y = \log \varphi(\beta).$$

Conservons les mêmes droites qui, d'ailleurs, n'ont pas besoin d'être construites, grâce à l'artifice de l'indicateur transparent (n° 18), comme isoplèthes (I_1) et (I_2) de la seconde équation. Les troisièmes isoplèthes (γ'') seront généralement, dans ce cas, non plus des droites parallèles comme pour γ', mais des courbes dont l'équation, en supposant que f_1 et φ_1 soient les fonctions inverses des fonctions f et φ, peut s'écrire

$$\gamma'' = F[f_1(10^x), \varphi_1(10^y)].$$

Supposons ces isoplèthes construites dans la région E correspondant aux valeurs comprises entre les limites pour lesquelles γ'' doit s'ajouter à γ', et superposons cet abaque à celui de γ', en faisant coïncider, d'une part, les échelles (α), de l'autre les échelles (β) de ces abaques, qui sont les mêmes par hypothèse. Sur l'abaque double ainsi obtenu (*fig.* 16), les valeurs de γ' sont données par la troisième échelle de l'abaque hexagonal primitivement construit, celles de γ'' par les cotes des isoplèthes tracées en second lieu.

Les deux premiers axes de l'indicateur transparent passant dès lors par les points (α) et (β) des deux premières échelles, le troisième passe par le point (γ') de la troisième. Si, en outre, le centre de l'indicateur tombe dans la région E ci-dessus définie, la cote de l'isoplèthe sur laquelle il se trouve fait connaître γ''. On n'a plus qu'à effectuer la somme $\gamma' + \gamma''$.

Ainsi, dans l'exemple représenté en pointillé sur la *fig.* 16, pour

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 1,$$

on a

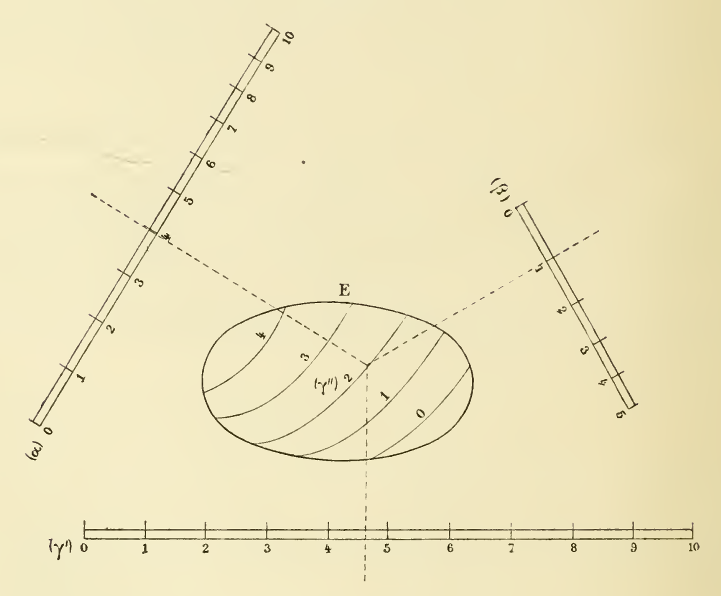
$$\gamma' = 4,6, \qquad \gamma'' = 2,$$

et par suite

$$\gamma = 6,6.$$

L'aire E, avec ses isoplèthes, a reçu de M. Lallemand, à qui est

Fig. 16.



dû cet artifice, le nom d'*échelle centrale additionnelle,* nom qui se justifie par ce fait que la lecture se fait sur cette échelle au moyen du centre de l'indicateur.

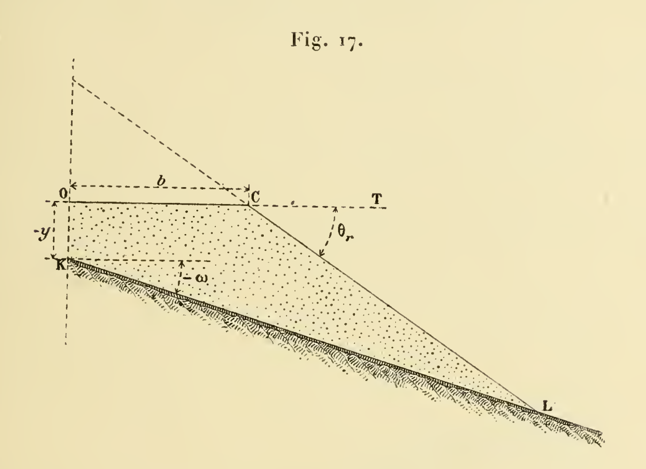
Ainsi, d'une part, on est averti des cas où il y a lieu de tenir compte du terme complémentaire, par cela seul que le centre de l'indicateur tombe à l'intérieur de l'échelle centrale E, et la valeur même de ce terme complémentaire est fournie par la cote de l'isoplèthe sur laquelle se trouve le centre.

Abaques de remblai et de déblai.

25. A titre d'application de ce qui précède, nous ferons connaître les abaques construits par M. Lallemand pour le calcul des profils de remblai et de déblai.

1° *Remblai.* — On dit qu'un demi-profil est en remblai lorsque

Fig. 17.



l'arête extérieure de ce demi-profil est en remblai (*fig.* 17 et 18).

Si nous désignons par

x la déclivité transversale (tangente trigonométrique de l'angle ω d'inclinaison sur l'horizon) du terrain naturel, prise avec le signe + quand le terrain s'élève en rampe à partir de l'axe dans le demi-profil considéré (*fig.* 20 et 21), et avec le signe — quand il est en pente [1] (*fig.* 17 et 18);

y la cote sur l'axe OK prise avec le signe + quand elle est en déblai, avec le signe — quand elle est en remblai [2];

b la demi-largeur OC de la plate-forme;

---

[1] Cette convention revient à prendre toujours comme sens positif celui de l'axe vers l'arête extérieure du demi-profil considéré, soit celui de gauche à droite pour les demi-profils à droite de l'axe, celui de droite à gauche pour les demi-profils à gauche.

[2] Cette convention revient à prendre toujours l'origine des cotes au niveau de la plate-forme.

Les isoplèthes (I_1) et (I_2) seront d'ailleurs, pour l'une comme pour l'autre de ces équations

$$(I_1) \qquad X = -\log 2(t_d - x),$$
$$(I_2) \qquad Y = 2\log[(b+l)t_d + y].$$

Les explications de détail étant, pour le fond, les mêmes dans ce cas que dans le précédent, nous y glisserons plus rapidement.

Pour $x < 0$, l'abaque est limité à la ligne pour laquelle

$$y = -bx,$$

ligne dont l'équation s'obtient en éliminant x et y entre cette dernière et les équations (I_1) et (I_2) ci-dessus. Il vient ainsi

$$10^{\frac{Y}{2}} - lt_d = b\,\frac{10^{-X}}{2}.$$

Cette courbe, dans sa portion utile, diffère insensiblement en pratique d'une droite parallèle à l'axe des y. Elle passe d'ailleurs par le point correspondant à $x = 0$, $y = 0$, car pour ce point

$$X = -\log 2 t_d, \qquad Y = 2\log(b+l)t_d.$$

Quant à la partie de l'abaque correspondant à $x > 0$, elle est limitée à la ligne pour laquelle

$$y = -h - \left(b + l - \frac{h}{t_d}\right)x,$$

dont l'équation est

$$10^{\frac{Y}{2}} - (b+l)t_d = -h - \left(b + l - \frac{h}{t_d}\right)\left(t_d - \frac{10^{-X}}{2}\right)$$

ou

$$10^{\frac{Y}{2}} = \left(b + l - \frac{h}{t_d}\right)\frac{10^{-X}}{2},$$

ou encore

$$\frac{Y}{2} = -X + \log\frac{1}{2}\left(b + l - \frac{h}{t_d}\right).$$

C'est une droite parallèle à l'axe des y. Quant à l'échelle centrale qui correspond, pour $x > 0$, aux valeurs de $y > 0$, elle est comprise entre la droite qui vient d'être tracée et l'isoplèthe $y = 0$.

Les isoplèthes (D'') tracées sur cette échelle centrale, obtenues

comme les isoplèthes (R″) du cas précédent, ont pour équation

$$D'' = \frac{\left[10^{\frac{Y}{2}} - (b+l)t_d\right]^2}{2t_d - 10^{-X}}.$$

L'emploi de l'abaque (*Pl. III*) ne diffère pas de celui du cas précédent.

Deux des axes de l'indicateur passant respectivement par les points (x) et (y) des échelles correspondantes, le troisième axe donne sur la troisième échelle la valeur de D′. Si le centre de l'indicateur est extérieur à l'échelle centrale, on a $D = D'$. S'il tombe à l'intérieur de cette échelle, la cote de l'isoplèthe sur laquelle il se trouve fait connaître D″, et on a $D = D' + D''$. Dans ce dernier cas, il y a remblai sur l'axe, et l'aire du remblai est précisément D″.

Si le centre de l'abaque tombe en dehors des limites ci-dessus définies, c'est-à-dire dans la région dont le bord est marqué par des hachures, l'abaque ne s'applique plus : on est dans le cas de la formule des remblais.

Ainsi donc, x et y étant donnés pour un certain demi-profil, on n'a pas à s'inquiéter de savoir si l'on est en déblai ou en remblai, dans un cas normal ou dans un cas mixte.

Avec ces valeurs de x et de y on entre dans l'un ou l'autre des deux abaques, dans celui des remblais, par exemple. Si le centre de l'indicateur tombe dans la partie utile de cet abaque, c'est qu'on est bien en remblai; sinon (c'est-à-dire s'il tombe dans la région marquée par les hachures) c'est qu'on est en déblai, et on se transporte dans l'autre abaque. Quant aux cas mixtes, on en est averti par le fait que le centre de l'indicateur tombe à l'intérieur de l'échelle centrale.

Les abaques des *Pl. II* et *III* montrent l'application des règles précédentes à un projet de route établi avec les éléments ci-après :

$$b = 5^{m}, \qquad l = 1^{m},50, \qquad h = 0^{m},50, \qquad t_d = 1, \qquad t_r = \frac{2}{3}.$$

En outre, x est supposé varier de $-0,5$ à $+0,5$ et y de -20^{m} (cote sur l'axe en remblai) à $+20^{m}$ (cote sur l'axe en déblai).

L'échelle y de l'abaque des remblais (*Pl. II*) a été fractionnée (n° 19) au point $y = -4$. Il s'en est suivi pour R′ une seconde

échelle correspondante. On a souligné la graduation des deux échelles supplémentaires pour distinguer celles-ci des échelles primitives.

En outre, afin de rendre impossible toute erreur relative au signe de x et de y, on a, pour x, distingué l'échelle des pentes de celle des rampes; pour y, celle des cotes en remblai sur l'axe de celle des cotes en déblai.

Exemple d'application (indiqué en pointillé sur la *Pl. II*) :

Le terrain naturel a une pente de 0,4. La cote sur l'axe est de 0,90 en déblai.

L'abaque de remblai donne

$$R' = 2,7, \qquad R'' = 1.$$

Il y a donc 1^{mq} de déblai sur l'axe et $3^{mq},7$ de remblai.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS A TRIPLE RÉGLURE QUELCONQUE. ABAQUES A POINTS ISOPLÈTHES.

26. L'artifice des abaques hexagonaux n'est applicable qu'aux équations à triple réglure *parallèle*. Les applications en sont, il est vrai, extrêmement nombreuses; il n'y en a pas moins un intérêt sérieux à indiquer le principe suivant qui, dérivant d'ailleurs d'un tout autre ordre d'idées, permet de remplacer les systèmes d'isoplèthes par de simples échelles (remplacement dont les avantage ont été signalés au n° 17), non seulement pour les équations à triple réglure parallèle, mais pour celles à triple réglure quelconque.

Disons tout de suite que, bien que ce nouveau principe soit plus général, celui de M. Lallemand devra ordinairement lui être préféré dans le cas de la triple réglure parallèle, à cause de la possibilité si précieuse du fractionnement des abaques qui n'existe qu'avec ce dernier.

C'est assez d'ailleurs, pour affirmer l'utilité de la méthode des points isoplèthes, du champ des équations à triple réglure quelconque.

Principe de la méthode des points isoplèthes ([1]).

27. Reportons-nous donc au n° 4. Nous avons vu là que, lorsque l'équation revêt la forme (E'''), dont (E'') et (E^{IV}) ne sont que des cas particuliers, cette équation est représentable par trois cours

([1]) C'est en 1884 que nous avons publié, pour la première fois, à propos d'un exemple particulier, le principe de la méthode des points isoplèthes (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e sem., p. 531). Nous l'avons depuis énoncé dans toute sa généralité (*Génie civil*, t. XVII, p. 343).

Transformation des abaques à droites isoplèthes en abaques à points isoplèthes.

29. Rien de plus simple, lorsqu'on prend un abaque à trois systèmes de droites isoplèthes, que de construire l'abaque corrélatif à trois systèmes de points isoplèthes.

Il suffira de prendre les coordonnées

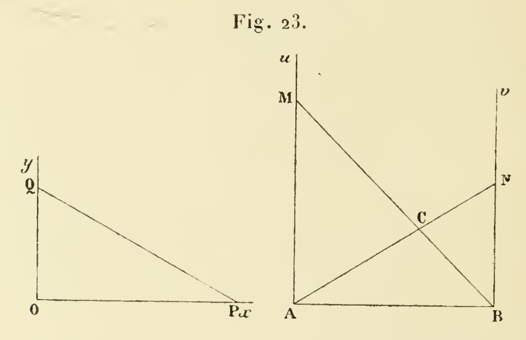
$$(x = a,\ y = b) \quad \text{et} \quad (x = a',\ y = b')$$

de deux points appartenant à chacune des droites du premier abaque. Le point correspondant sera celui où se rencontrent les droites dont les coordonnées, dans le système parallèle choisi, seront

$$(u = a,\ v = b) \quad \text{et} \quad (u = a',\ v = b').$$

Soit, par exemple, la droite PQ (*fig.* 23).

Fig. 23.



Au point P($x = p$, $y = 0$) correspond la droite BM($u = p$, $v = 0$); au point Q($x = 0$, $y = q$), la droite AN($u = 0$, $v = q$). Donc le point C où se croisent BM et AN est corrélatif de la droite PQ qui joint les points P et Q.

Abaque de l'équation trinôme du troisième degré.

30. Comme exemple d'application, nous donnons ici (*fig.* 24 et *Pl. VIII*, courbe cotée 0) l'abaque pour la résolution de l'équation

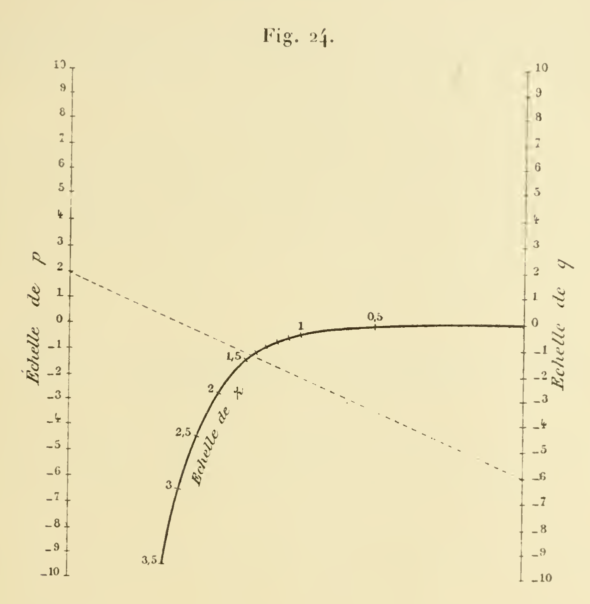
$$z^3 + pz + q = 0\ (^1).$$

---

(1) Nous avons fait connaître cet abaque dans notre Mémoire de 1884 (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre, Pl. XL, *fig.* 3). Nous l'avons reproduit dans notre brochure : *Coordonnées parallèles et axiales*.

que nous avons obtenu en transformant, comme il vient d'être dit, l'abaque décrit au nº 15 et représenté par la *fig.* 9. Il ne donne, comme celui-ci, que les racines positives de l'équation. Les racines négatives seraient données par les points de la courbe ex-

Fig. 24.



térieurs aux axes. On les obtient sur l'abaque réduit comme racines positives de l'équation

$$z^3 + pz - q = 0.$$

De même qu'avec l'abaque du nº 15, il suffisait de prendre les cotes des droites isoplèthes (z) passant par le point $x = p$, $y = q$, il suffira ici de prendre les cotes des points isoplèthes (z) situés sur la droite $u = p$, $v = q$.

On voit combien l'emploi de ce système est simple. Prenons, comme exemple, l'équation

$$x^3 + 2x - 6 = 0.$$

Joignant par une droite le point 2 de l'axe des p au point -6 de l'axe des q, nous obtenons sur la courbe le point 1,46 qui fait connaître la racine cherchée [1].

---

[1] Cette valeur a été obtenue, en réalité, sur un abaque dont la *fig.* 24 n'est que la réduction au $\frac{1}{5}$.

Pour n'avoir pas à tracer de ligne sur l'abaque, il suffira de faire usage d'un transparent sur lequel sera marqué un trait rectiligne ou, mieux encore, d'un fil ou d'un crin qu'on tendra entre les points à joindre par une droite ([1]).

31. Il est bien évident que l'emploi des coordonnées parallèles ne servira pas seulement à transformer des abaques déjà construits au moyen des coordonnées cartésiennes.

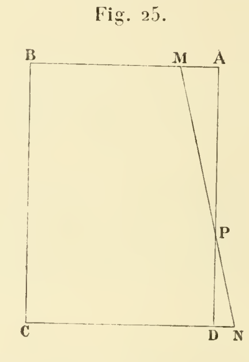
Une équation à triple réglure étant donnée, on pourra, par l'application directe des coordonnées parallèles, obtenir immédiatement l'abaque à points isoplèthes correspondant.

Nous allons en prendre un exemple, qui nous fournira l'occasion de plusieurs remarques utiles.

Abaque du fruit intérieur du mur de soutènement d'une terrasse horizontale.

32. Supposons qu'on ait calculé le profil rectangulaire ABCD du mur de soutènement d'une terrasse horizontale et qu'on veuille

Fig. 25.



lui substituer un profil de même résistance à fruit intérieur MBCN.

([1]) Ce dernier procédé a, sur le précédent, au point de vue pratique, une incontestable supériorité qui tient à ceci : l'axe du transparent ayant été mis d'abord sur l'un des deux points à joindre, lorsqu'on l'amènera sur l'autre, on fera généralement varier un peu sa position aux environs du premier. Il faudra l'y ramener par un nouveau petit déplacement; de là quelques tâtonnements que l'emploi du fil permet d'éviter. En effet, le fil étant posé sur l'un des deux points, on l'y maintient avec l'ongle, tandis qu'on amène l'autre extrémité sur le second point. Il n'y a, de cette façon, aucune hésitation dans la lecture.

Soit (*fig.* 25)

p le rapport du poids de 1^mc de terre à celui de 1^mc de maçonnerie,

$$l = \frac{BM}{BA}, \qquad h = \frac{AP}{AD}.$$

On se donne l; p est connu; h s'en déduit par la formule

$$(1+l)h^2 - l(1+p)h - \frac{(1-l)(1+2p)}{3} = 0\ (^1).$$

Cette équation est du type (E^{iv}) (n° 4). Posons donc, en employant les coordonnées parallèles de droites u et v, au lieu des coordonnées de points x et y,

$$u = \frac{l(1+p)}{1+l}, \qquad v = \frac{(1-l)(1+2p)}{3(1+l)}.$$

Éliminant successivement p et l entre ces deux équations, on a pour les équations (I_1) et (I_2) des isoplèthes (l) et (p)

(I_1) $$v3l(l+1) + u2(l^2-1) - l(l-1) = 0,$$

(I_2) $$v3(p+1) + u(2p+1) - (p+1)(2p+1) = 0.$$

Quant à l'équation (I_3) (qui résulte de l'élimination de l et de p entre ces deux équations, ou les deux précédentes, et l'équation donnée), elle est ici

(I_3) $$hu + v - h^2 = 0.$$

Pratiquement,

l	varie entre	0,5	et	1,
p	»	0,4	et	1,
h	»	0,7	et	1.

Il suffit donc, entre ces limites, de faire varier l, p et h respectivement dans les équations (I_1), (I_2) et (I_3), en faisant croître leurs valeurs, par exemple, de 0,05 en 0,05, et de marquer les points correspondants, l'abaque se trouve ainsi construit.

(¹) MASSAU, *loc. cit.*, n° 298. L'épaisseur du mur à section rectangulaire est donnée par $e = \text{tang}\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{mp}{3}}$, φ étant l'angle du talus naturel des terres, m le coefficient de stabilité qu'on se donne. Cette formule est facile à traduire en abaque hexagonal.

tel artifice n'est pas applicable avec les abaques à points isoplèthes, attendu qu'ici le mode de liaison entre points correspondants est constitué par le fait de se trouver en ligne droite et qu'une déformation arbitraire aurait pour effet d'altérer toutes les droites du plan.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS A PLUS DE TROIS VARIABLES. EMPLOI DES ÉCHELLES BINAIRES.

37. Il est facile de voir que le principe général utilisé pour la représentation des équations à trois variables ne peut pas être étendu à des équations à un plus grand nombre de variables. Si, en effet, nous introduisons une quatrième variable δ dans l'une des équations (I_1), (I_2), (I_3) du n° 1, par exemple dans la première, nous voyons qu'à chaque valeur de δ correspond un système d'isoplèthes (α). La superposition de ces divers systèmes d'isoplèthes (α) n'étant généralement pas possible sur un même tableau, il faut renoncer à ce mode de représentation. Nous ferons voir plus loin que ce principe est néanmoins applicable dans certaines circonstances (n° 45). Mais nous allons indiquer auparavant quelques artifices particuliers propres à conduire à la représentation d'équations à plus de trois variables, de types se rencontrant fréquemment dans la pratique.

Abaques hexagonaux à échelles binaires.

38. Le plus fécond de ces artifices est celui des échelles binaires, imaginé par M. Lallemand.

Nous avons vu, au n° 7, que les valeurs de toute fonction de deux variables $F(\alpha, \beta)$ pouvaient être obtenues, au moyen de parallèles à une direction fixe, sous forme de segments portés sur un certain axe, à partir d'une origine fixe O. Si la parallèle à la direction fixe menée par le point commun aux isoplèthes (α) et (β) coupe l'axe en question au point A, on a

$$OA = a = F(\alpha, \beta).$$

$F(\varepsilon, \varepsilon')$, nous voyons que nous avons la représentation de l'équation

$$f(\alpha, \alpha') + \varphi(\beta, \beta') + \psi(\gamma, \gamma') + \chi(\delta, \delta') = F(\varepsilon, \varepsilon').$$

La fonction du second membre pouvant être, par un simple changement de signe, reportée dans le premier, et le nombre des termes pouvant être, par la répétition du procédé sus-indiqué, pris tel que l'on veut, on peut dire que *la méthode en question permet de représenter toute équation dont le premier membre, égalé à* o, *se décompose en une somme de fonctions ne contenant chacune pas plus de deux variables* et que, pour cette raison, on peut appeler des *éléments binaires.*

Si l'équation est formée par l'égalité à une constante d'un produit d'éléments binaires, elle se ramène au cas précédent par une simple transformation logarithmique.

Généralisation de la multiplication graphique.

41. On a ainsi un champ très vaste d'équations à un nombre quelconque de variables, représentables sur un plan. Mais M. Lallemand a été encore plus loin, grâce à un nouvel artifice dont nous allons maintenant parler et qui lui a permis de représenter *toute équation dont chacun des membres se décompose en une somme de produits d'éléments binaires*, équation qui ne saurait, par transformation logarithmique, être ramenée au cas précédent.

Accolons à l'axe Ox (*fig.* 32) une échelle binaire E_1 du type défini au n° 7. Elle nous donnera sur cet axe, au moyen de parallèles à Oy, les valeurs d'une fonction de deux variables $\varphi(\alpha, \beta)$.

De même, une échelle binaire à radiantes E_2, du type défini au n° 8, nous donnera les valeurs d'une autre fonction de deux variables $\psi(\gamma, \delta)$ comme coefficients angulaires des droites issues de l'origine et passant par les points de rencontre des isoplèthes (γ) et (δ). On peut d'ailleurs toujours faire en sorte que le bord gauche de E_2 prolonge le bord droit de E_1. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait de prendre la figure homothétique de E_2 par rapport au point O, de façon à satisfaire à cette condition.

Prenons le point qui est à la rencontre de la parallèle à Oy, menée par le point de rencontre des isoplèthes (α) et (β) de l'échelle E_1 avec la droite joignant le point O au point de rencontre des iso-

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

ÉLÉMENTS
DE
CALCUL INFINITÉSIMAL

PAR M. DUHAMEL,
Membre de l'Institut.

QUATRIÈME ÉDITION,
REVUE ET ANNOTÉE
Par M. J. BERTRAND,
De l'Académie française,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

DEUX VOLUMES IN-8, AVEC PLANCHES; 1886-1887. — PRIX : 15 FR.

Avertissement de la quatrième édition.

On a plus d'une fois exprimé le regret qu'un Livre aussi justement classique, et non moins utile aux maîtres qu'aux élèves, laissât complètement de côté plusieurs chapitres importants, imposés aujourd'hui par les progrès de la Science dans l'enseignement de nos écoles. Il est devenu impossible, par exemple, dans un cours d'Analyse infinitésimale, de ne pas introduire les éléments au moins de la théorie des fonctions elliptiques et les principes généraux relatifs aux fonctions d'une variable imaginaire.

Préoccupé, dans les dernières années de sa vie, d'études et de méditations d'un tout autre ordre, M. Duhamel, à qui cette lacune a souvent été signalée, n'a pu trouver le loisir de la combler, et ses papiers ne contiennent aucune étude sur cette partie de la Science. Sans prétendre ici suppléer aux pages excellentes et profondes qu'il aurait pu ajouter à son Livre, nous avons espéré qu'on trouverait avec plaisir l'exposition des principes aujourd'hui élémentaires et classiques dans l'enseignement du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

Les Notes que l'on trouve à la fin du Tome I[er] et du Tome II sont extraites, avec de légères modifications, de mon *Traité de Calcul différentiel et intégral;* leur lecture sera facile, je l'espère, à ceux qui auront lu et compris le Livre de M. Duhamel.

J. BERTRAND.

Préface de la deuxième édition.

La marche suivie dans la première Partie de cet Ouvrage est fort différente de celle qu'ont adoptée les divers auteurs qui ont écrit sur le même sujet. Elle ne se rapporte précisément à aucun enseignement existant, mais à l'enseignement tel que je crois qu'il doit être. L'ordre suivant lequel les diverses parties d'une science doivent être présentées, du moins quant à ce qu'elles ont de général et de caractéristique, est presque toujours l'ordre même suivant lequel elles ont été découvertes. Les conceptions importantes ne sont point dues au hasard : elles se présentent aux hommes éminents de chaque époque lorsqu'elles sont naturellement amenées par les besoins et

varier à l'infini. Nous en avons choisi particulièrement quelques-unes, à cause de leur importance dans la science. En Géométrie, nous avons considéré la courbure des lignes planes, le cercle osculateur, les développées, etc.; en Mécanique, la vitesse, l'accélération, le poids spécifique en un point d'une substance non homogène, etc. Nous avons étudié aussi la question générale du déplacement d'une figure sur un plan, et nous avons vu comment se résolvent les problèmes de tangentes auxquels elle donne lieu.

Toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'ici se ramenant à des limites de sommes ou de rapports, nous avons cru convenable de les exposer et d'en faire des applications particulières avant d'établir les règles du Calcul différentiel et du Calcul intégral, qui donnent plus de simplicité et de généralité à l'exécution de tous les calculs auxquels elles se ramènent. Comme elles sont en elles-mêmes indépendantes des moyens d'exécution des opérations qu'elles indiquent, nous avons cru devoir les présenter avant les longues et pénibles théories d'Analyse, qui donnent les meilleures règles pour cette exécution. En suivant la marche inverse, on rebute l'esprit par des recherches abstraites dont il ne voit pas l'objet, et il est même à craindre que les théories géométriques que l'on expose ensuite ne soient prises pour des dépendances des théories analytiques, avec lesquelles elles n'ont en elles-mêmes rien de commun, et qui ne leur servent qu'à l'exécution du calcul des limites de sommes ou de rapports, auxquelles elles ont ramené l'objet de leur recherche.

Telle est la marche que nous avons suivie dans le premier Livre de cet Ouvrage. Dans les Livres suivants, nous donnons les règles pour trouver les limites des rapports des accroissements infiniment petits de variables liées par des équations données, ainsi que les limites des sommes d'infiniment petits, représentés par une formule générale. Nous donnons à ces deux problèmes d'Analyse, dont l'un est l'inverse de l'autre, toute l'extension dont ils sont susceptibles, en restant dans le cadre qui convient à de simples éléments, et nous formons ainsi ce que l'on appelle le Calcul différentiel et intégral.

Ainsi, dans cet essai, que nous espérons rendre un jour moins imparfait, notre objet a été l'étude de la méthode infinitésimale considérée en elle-même; et les procédés si importants du Calcul différentiel et du Calcul inverse ont été les moyens d'exécution des opérations auxquelles cette méthode a ramené la solution des questions qu'elle s'est proposées. Cette subordination, que nous avons tenu à rendre bien explicite et bien sensible, donne la raison de l'ordre que nous avons suivi dans cet Ouvrage, et du titre que nous lui avons donné.

La seconde Partie a pour objet principal l'intégration des équations différentielles; mais nous ne nous sommes pas proposé de traiter cette matière avec toute l'étendue que permettrait l'état actuel de la Science. Nous avons voulu simplement présenter un cours élémentaire de Calcul intégral, à peu près tel qu'était celui de l'École Polytechnique il y a quelques années. Toutefois, nous avons cherché à n'omettre aucune idée importante, et à préparer à la lecture des ouvrages des grands géomètres, tant sur l'Analyse pure que sur ses applications à la Mécanique et à la Physique. C'est dans cette vue, par exemple, que nous avons donné des formules pour la représentation des fonctions arbitraires par des séries trigonométriques ou des intégrales définies multiples, et montré comment ces dernières peuvent servir à l'expression des intégrales des équations différentielles et des équations aux différentielles partielles.

DUHAMEL.

14832 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

plèthes (γ) et (δ) de l'échelle E_2. D'après la définition même des échelles E_1 et E_2, on a pour ce point

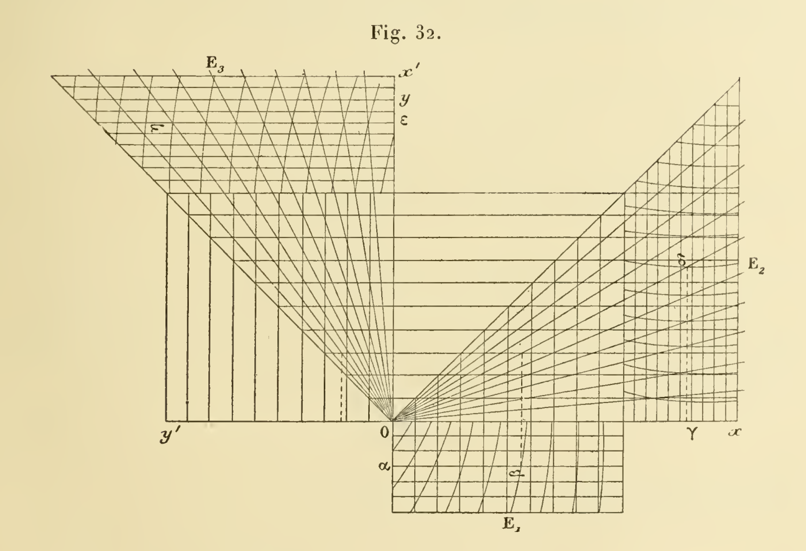
$$x = \varphi(\alpha, \beta),$$
$$y = x\psi(\gamma, \delta);$$

par suite

$$y = \varphi(\alpha, \beta)\psi(\gamma, \delta).$$

Si donc on a tracé sur l'abaque des parallèles aux axes Ox et Oy et des radiantes allant de O au bord extérieur de l'échelle E_2, on n'aura qu'à suivre la parallèle à Ox menée par le point de rencontre de la parallèle (α, β) à Oy et de la radiante (γ, δ) pour avoir sur Oy la valeur de $\varphi(\alpha, \beta)\ \psi(\gamma, \delta)$.

Fig. 32.



Faisant alors coïncider avec cet axe Oy l'axe Ox' d'un second abaque muni d'une échelle binaire à radiantes E_3 donnant les valeurs de $\chi(\varepsilon, \eta)$, on aura, de même, sur l'axe Oy', les valeurs de $\varphi(\alpha, \beta)\ \psi(\gamma, \delta)\ \chi(\varepsilon, \eta)$, et ainsi de suite.

On peut donc toujours disposer autour d'un certain axe A un abaque donnant sur cet axe les valeurs d'un produit d'éléments binaires en nombre quelconque.

Un second produit analogue pourra être donné par une échelle B, un troisième par une échelle C, etc.

cédés de représentation pour certaines classes d'équations à plus de trois variables. C'est ce que nous allons faire à présent ([1]).

Principe des points doublement isoplèthes.

45. Reprenons la forme générale (E''') (n° 4) des équations à triple réglure en introduisant une quatrième variable δ dans une des lignes du déterminant

$$(E) \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha,\delta) & f_2(\alpha,\delta) & f_3(\alpha,\delta) \\ \varphi_1(\beta) & \varphi_2(\beta) & \varphi_3(\beta) \\ \psi_1(\gamma) & \psi_2(\gamma) & \psi_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation exprime, si l'on représente par u et v des coordonnées parallèles de droites (n° 28), que les points dont les équations sont

$$(I_1) \qquad u f_1(\alpha,\delta) + v f_2(\alpha,\delta) + f_3(\alpha,\delta) = 0,$$

$$(I_2) \qquad u \varphi_1(\beta) + v \varphi_2(\beta) + \varphi_3(\beta) = 0,$$

$$(I_3) \qquad u \psi_1(\gamma) + v \psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0$$

sont alignés sur une même droite.

Lorsque, dans les équations (I_2) et (I_3), on fait varier les paramètres β et γ, on obtient deux séries de points isoplèthes (β) et (γ) distribuées chacune sur une certaine courbe.

Considérons maintenant l'équation (I_1). Pour chaque valeur de α, on obtient, par variation de δ, une certaine courbe qui est une isoplèthe (α). De même, pour chaque valeur de δ, on obtient, par variation de α, une isoplèthe (δ). Pour des valeurs particulières de α et de δ, le point (I_1) correspondant est à la rencontre des isoplèthes (α) et (δ) répondant à ces cotes particulières. C'est pourquoi nous l'appellerons *point doublement isoplèthe*.

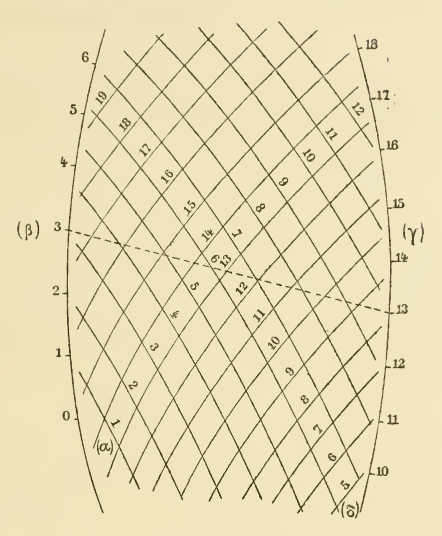
En résumé, l'équation (E) est représentée par un abaque (*fig.* 33) composé des deux séries de points isoplèthes (β) et (γ) et des deux cours d'isoplèthes (α) et (δ), et les valeurs correspondantes des quatre variables sont telles que la droite joi-

---

([1]) *Voir* aussi la fin du n° 10.

gnant le point (β) au point (γ) passe par le point de croisement des isoplèthes (α) et (δ) (1).

Fig. 33.



Par exemple, sur l'abaque de la *fig.* 33, pour

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 3, \qquad \gamma = 13,$$

on a, comme le montre la droite en pointillé,

$$\delta = 15.$$

On a ainsi le cas d'extension à quatre variables du principe fondamental, auquel nous avons fait allusion au n° 37.

Abaque de l'équation complète du troisième degré.

46. Appliquons tout de suite cette méthode à l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Il suffit, comme au n° 30, de prendre

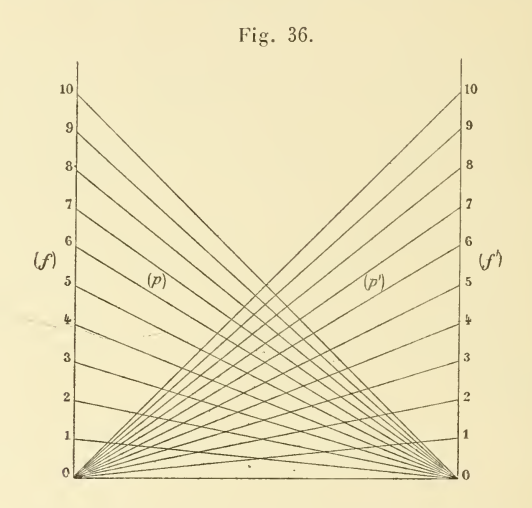
$$u = p, \qquad v = q,$$

(1) Nous avons communiqué cette méthode à l'Académie des Sciences dans la séance du 23 février 1891 (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 421).

au point de division p' de l'axe Bv (*fig.* 36). Ce sont, par suite, ces droites issues respectivement de B et de A qui constituent les isoplèthes (p) et (p').

Si donc on connaît p, f et p' et qu'on veuille avoir f', on n'a qu'à lire la cote du point où Bv est coupé par la droite joignant le

Fig. 36.



point f de Au au point de rencontre des radiantes p et p' issues de B et de A.

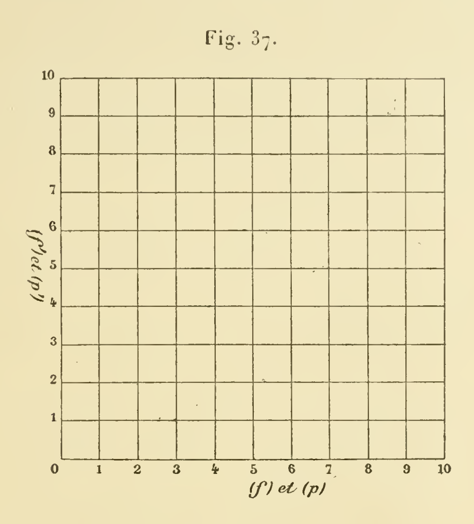
Dans le cas particulier de $f = f'$, on retrouve l'abaque de M. Gariel, que celui-ci a obtenu par un procédé particulier basé sur l'emploi combiné d'une anamorphose et d'une transformation perspective ([1]). La marche ci-dessus indiquée est incontestablement plus directe et plus rationnelle.

51. Nous avons développé l'exemple précédent pour faire voir comment la construction de l'abaque de M. Gariel se rattache au principe des points doublement isoplèthes. Nous ferons remarquer maintenant que la formule des lentilles peut se mettre en abaque encore plus simplement. Il suffit d'un quadrillage, tel, par exemple, que celui qui est imprimé sur le papier à croquis qu'on trouve dans le commerce.

([1]) *Voir* FAVARO et TERRIER, *Calcul graphique,* p. 219.

Ayant choisi dans ce quadrillage des axes Ox et Oy (*fig.* 37), on voit que la verticale correspondant à la valeur de f et l'horizontale correspondant à la valeur de f' doivent se couper sur la droite

Fig. 37.



qui joint le point p de l'axe Ox au point p' de l'axe Oy. Cela tient tout simplement à ce que l'équation de cette droite est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{p'}=1.$$

L'abaque ainsi obtenu et celui de la *fig.* 36 sont corrélatifs, selon le mode indiqué au n° 29. On peut remarquer, dans un intérêt purement théorique, que ce dernier abaque se rattache immédiatement aussi, si l'on veut, au principe des points doublement isoplèthes. Il suffit, pour cela, d'observer que l'équation

$$\frac{f}{p}+\frac{f'}{p'}=1$$

est représentable par les deux systèmes de points simplement isoplèthes

$$u+v=2p' \qquad (x=0,\ y=p'),$$
$$u(1-p)+v(1+p)=0 \qquad (x=p,\ y=0),$$

et le système de points doublement isoplèthes

$$u(1-f)+v(1+f)-2f'=0 \qquad (x=f,\ y=f').$$

TABLE DES PLANCHES.

17329 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

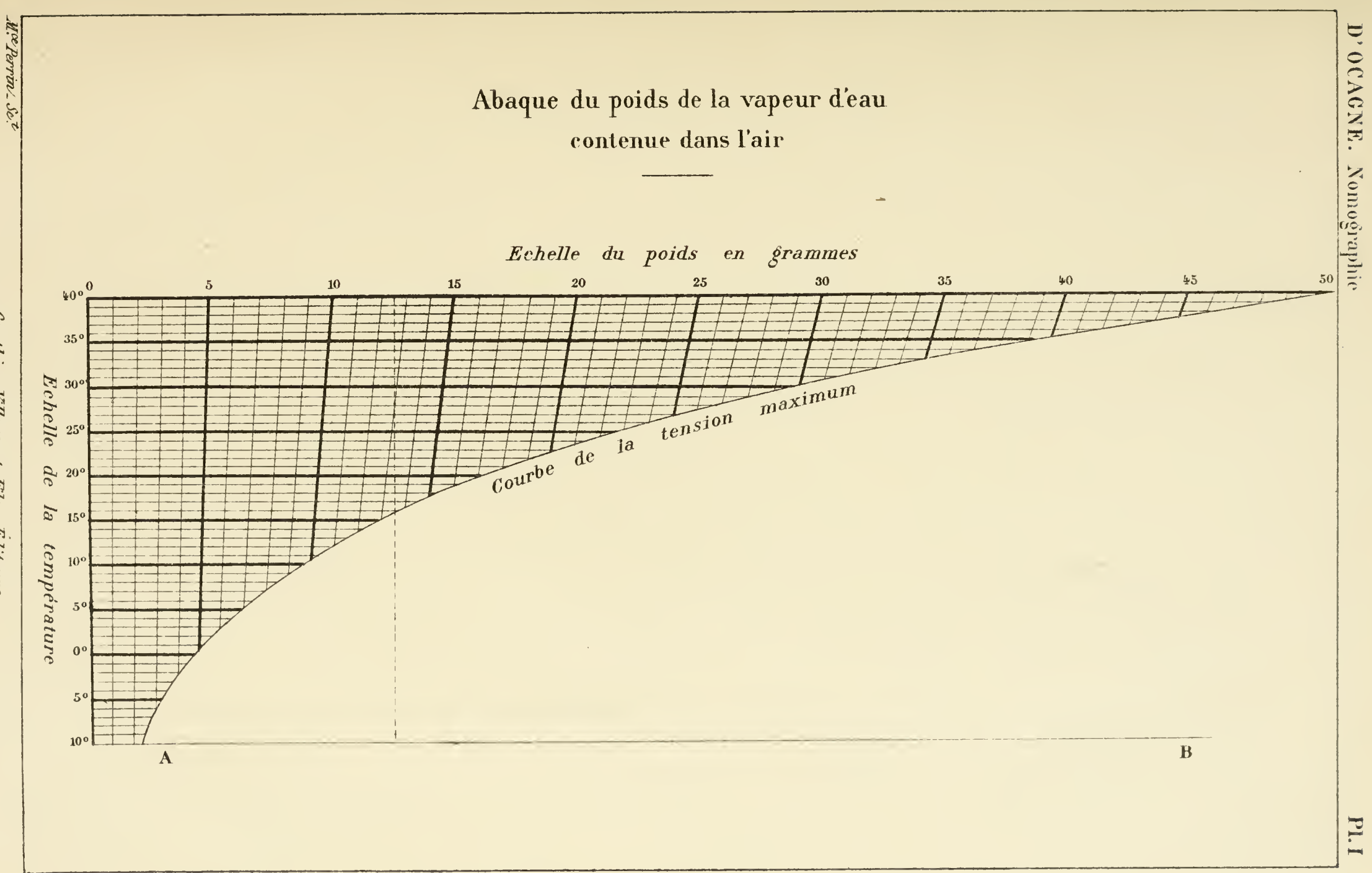
Transparent à détacher

POUR L'EMPLOI DES ABAQUES HEXAGONAUX

(*Pl. II, III, V, VI, VII*).

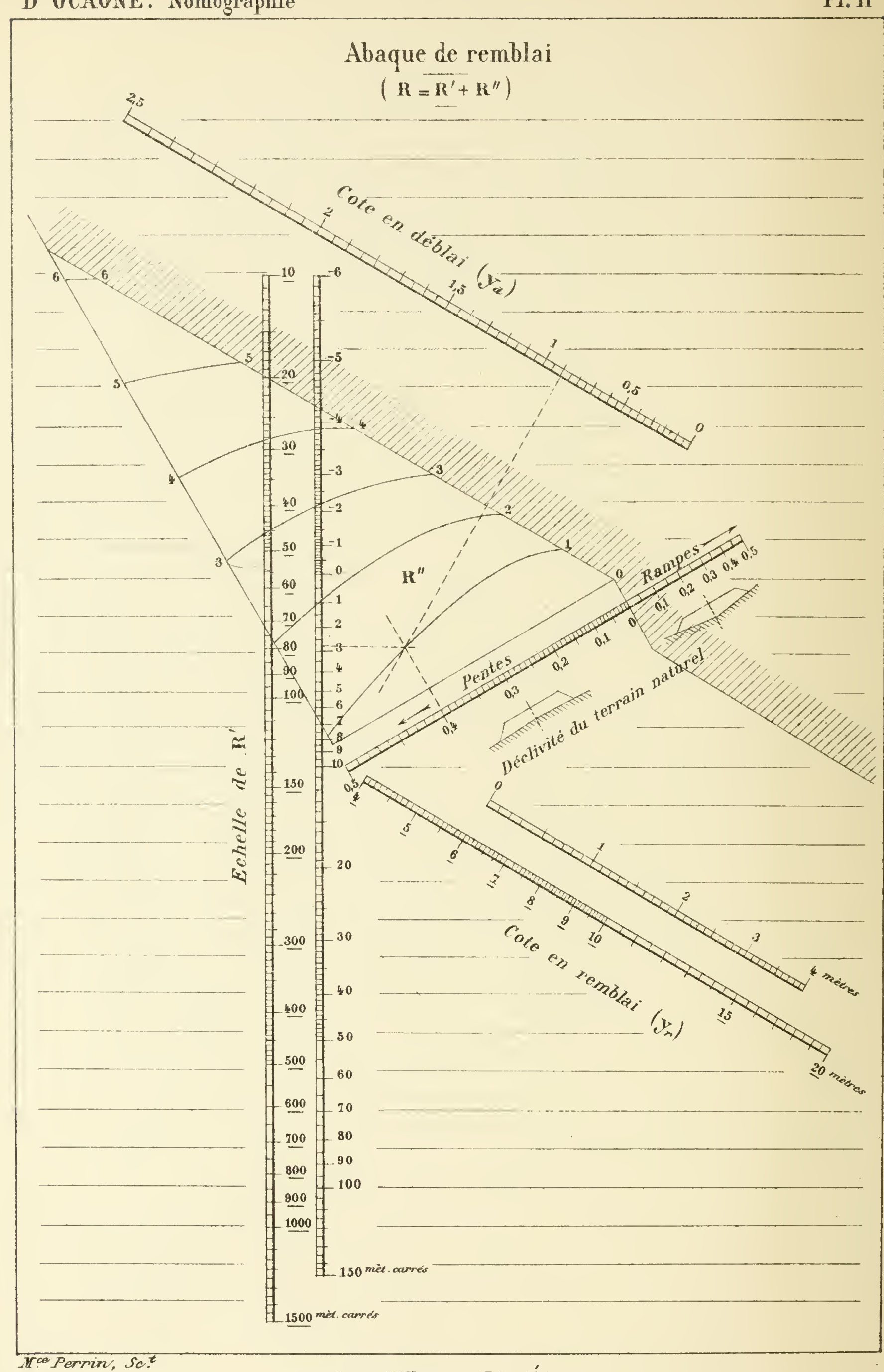
Transparent à détacher

POUR L'EMPLOI DES ABAQUES HEXAGONAUX



M.me Perrin Sc.t

Gauthier-Villars et Fils _ Éditeurs.

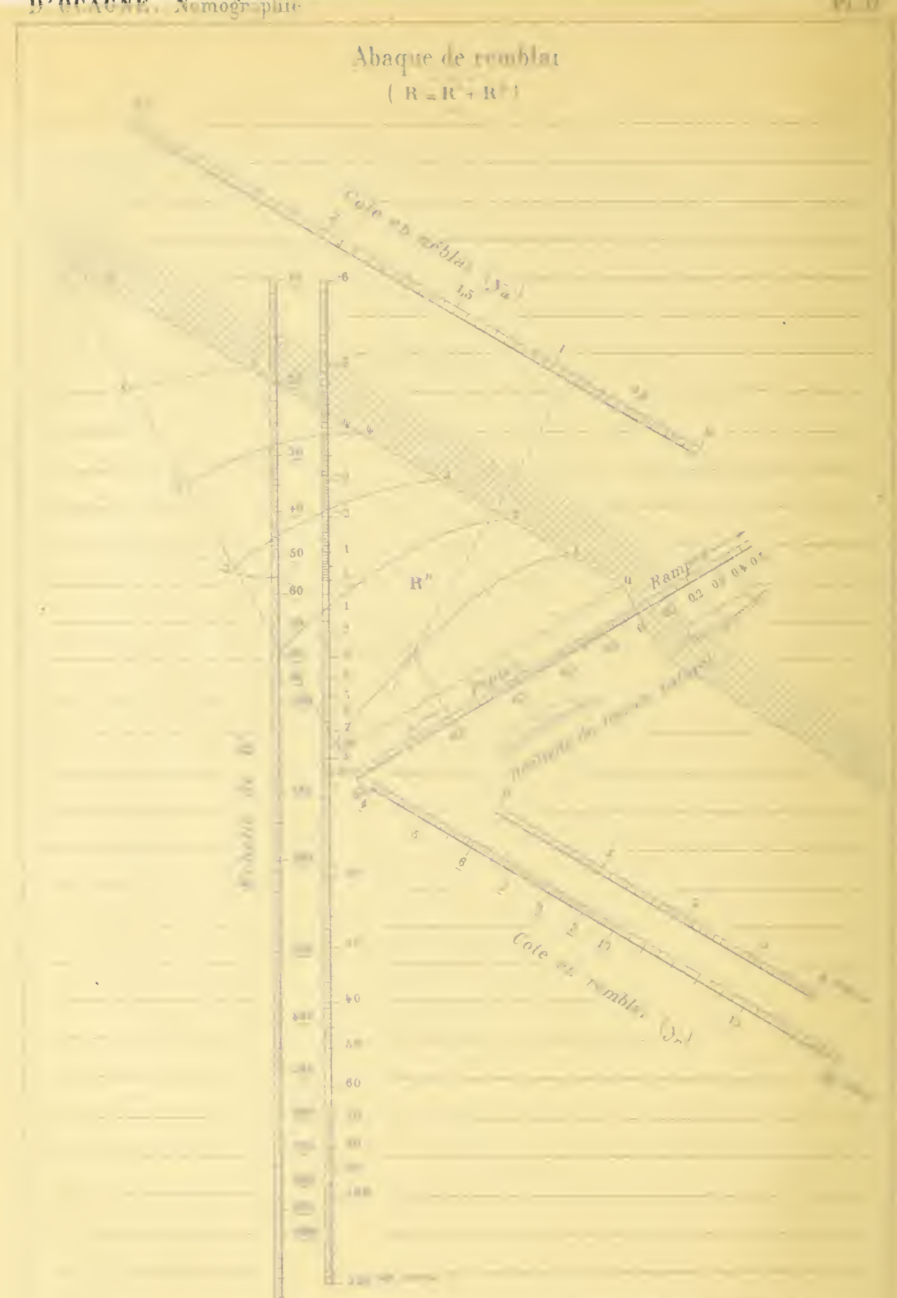


Mme Perrin, Sc.t
Gauthier-Villars et Fils, Éditeurs.

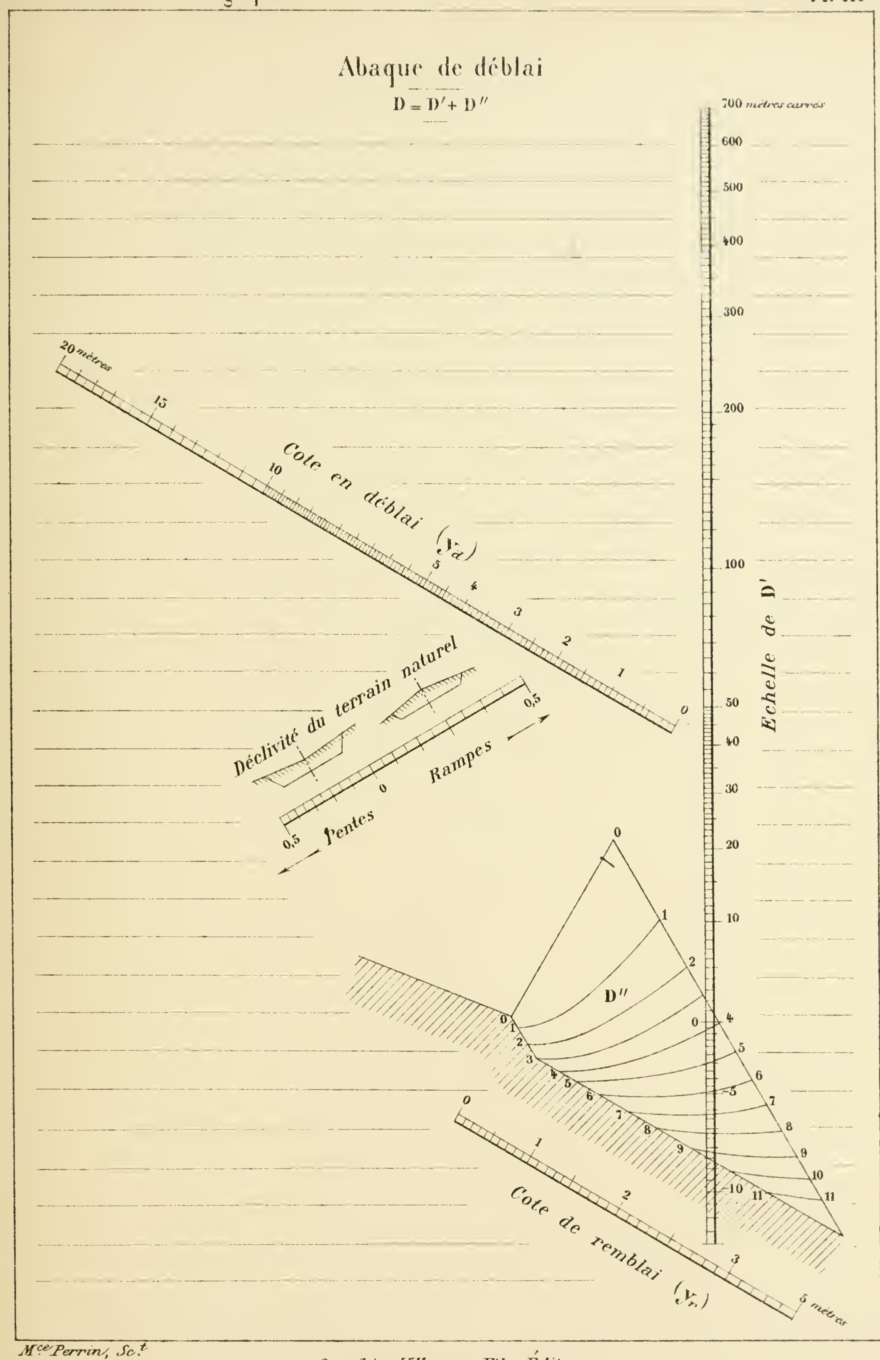
Abaque de déblai

$$D = D' + D''$$

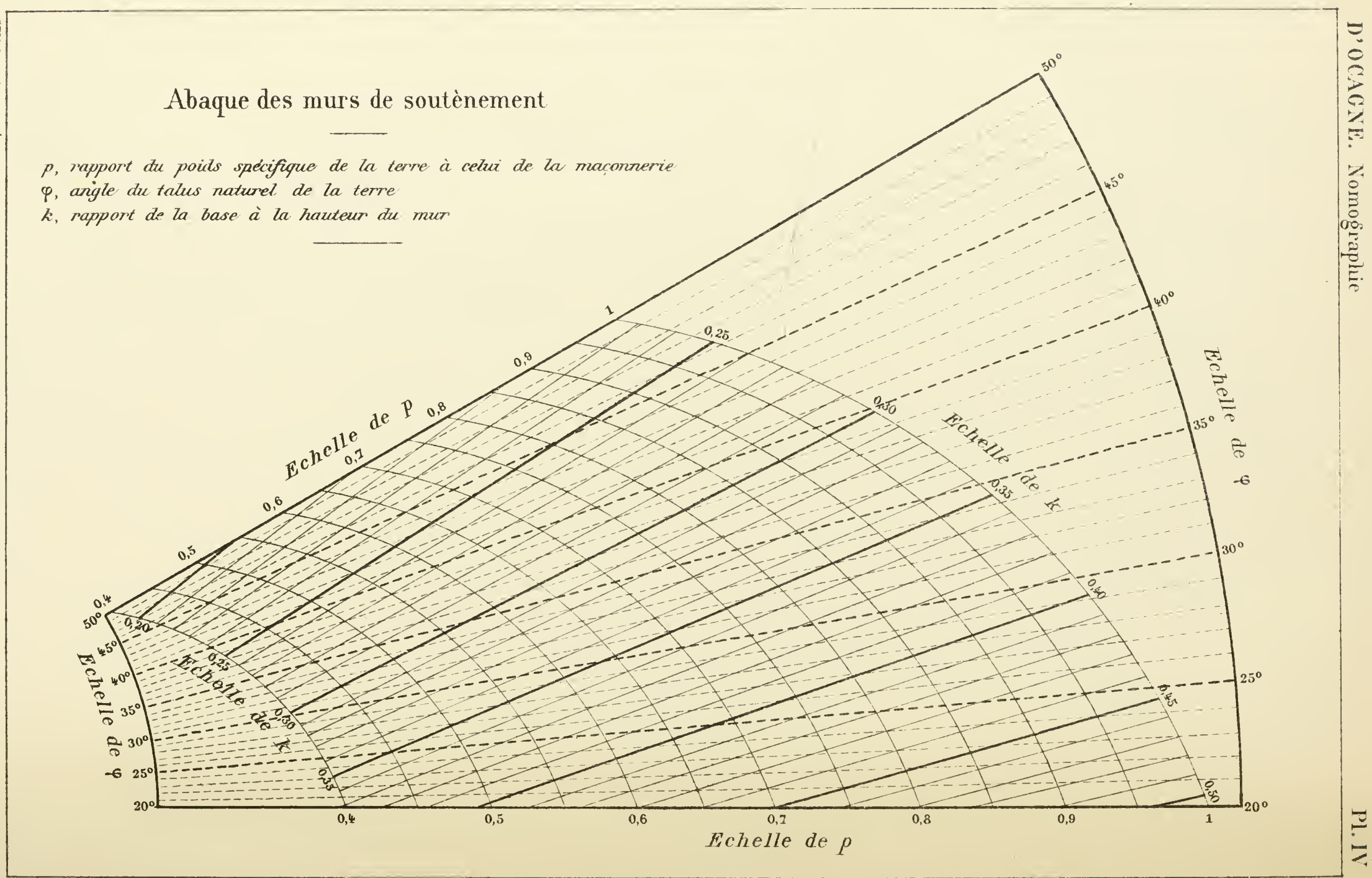
Gauthier-Villars et Fils, Éditeurs



Gauthier-Villars et Fils, Éditeurs.



Mce Perrin, Sct.
Gauthier-Villars et Fils, Éditeurs.



Mce Perrin, Sct

Gauthier-Villars et Fils _ Éditeurs.

Abaque des intérêts composés

Taux

Temps

10

20

30

40

50

$2\frac{1}{2}$ %

3 %

4 %

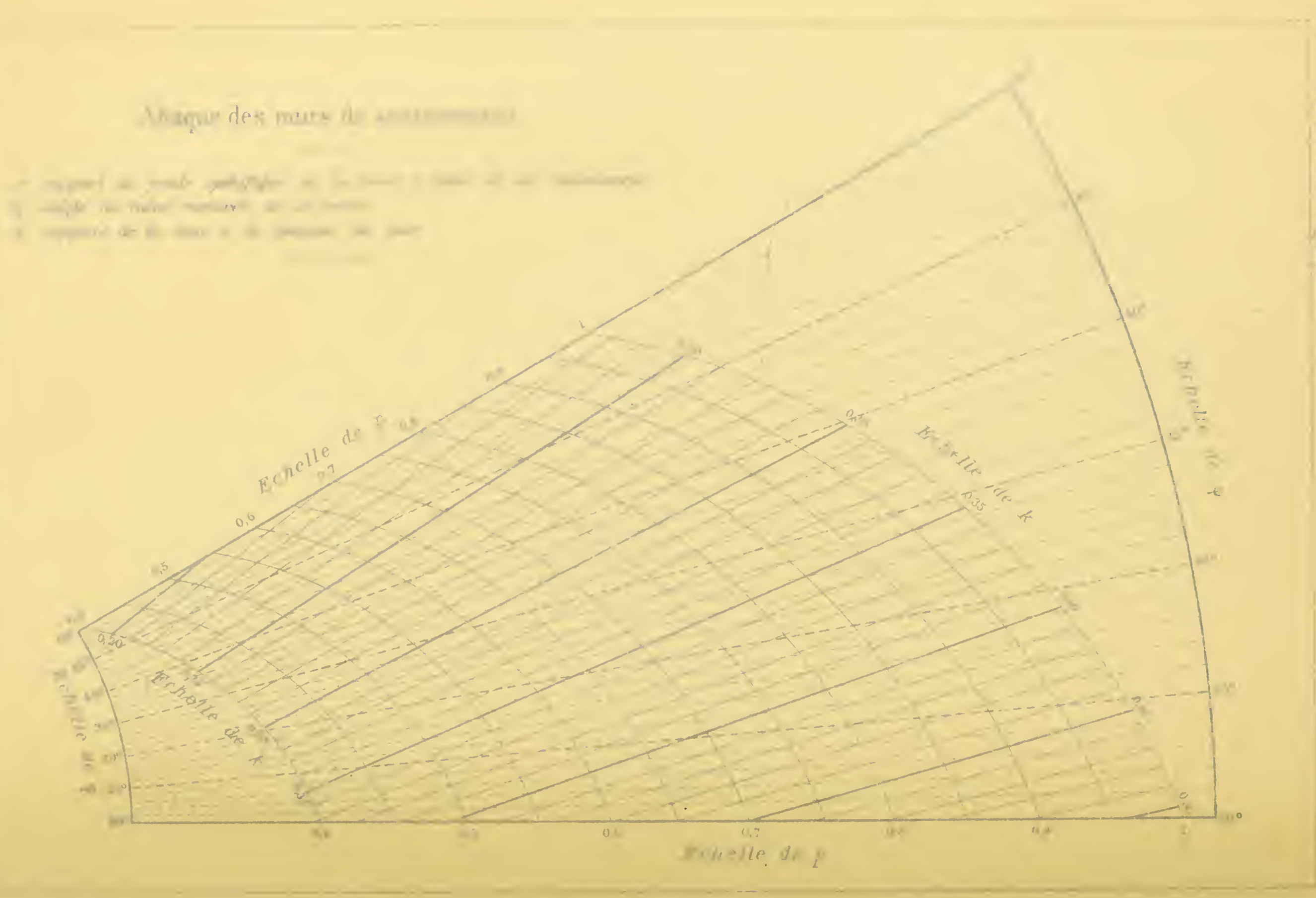
5 %

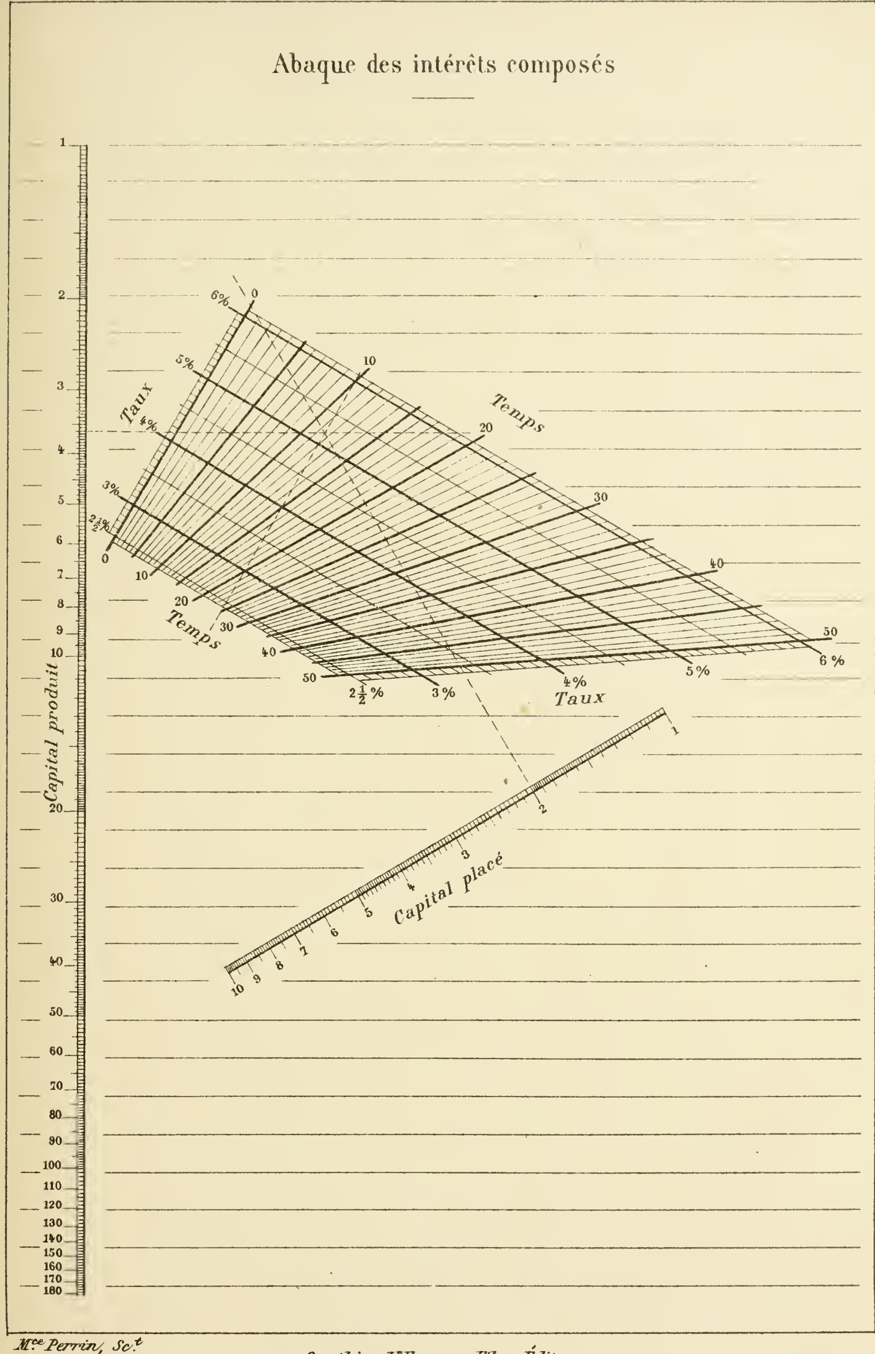
Taux

Temps

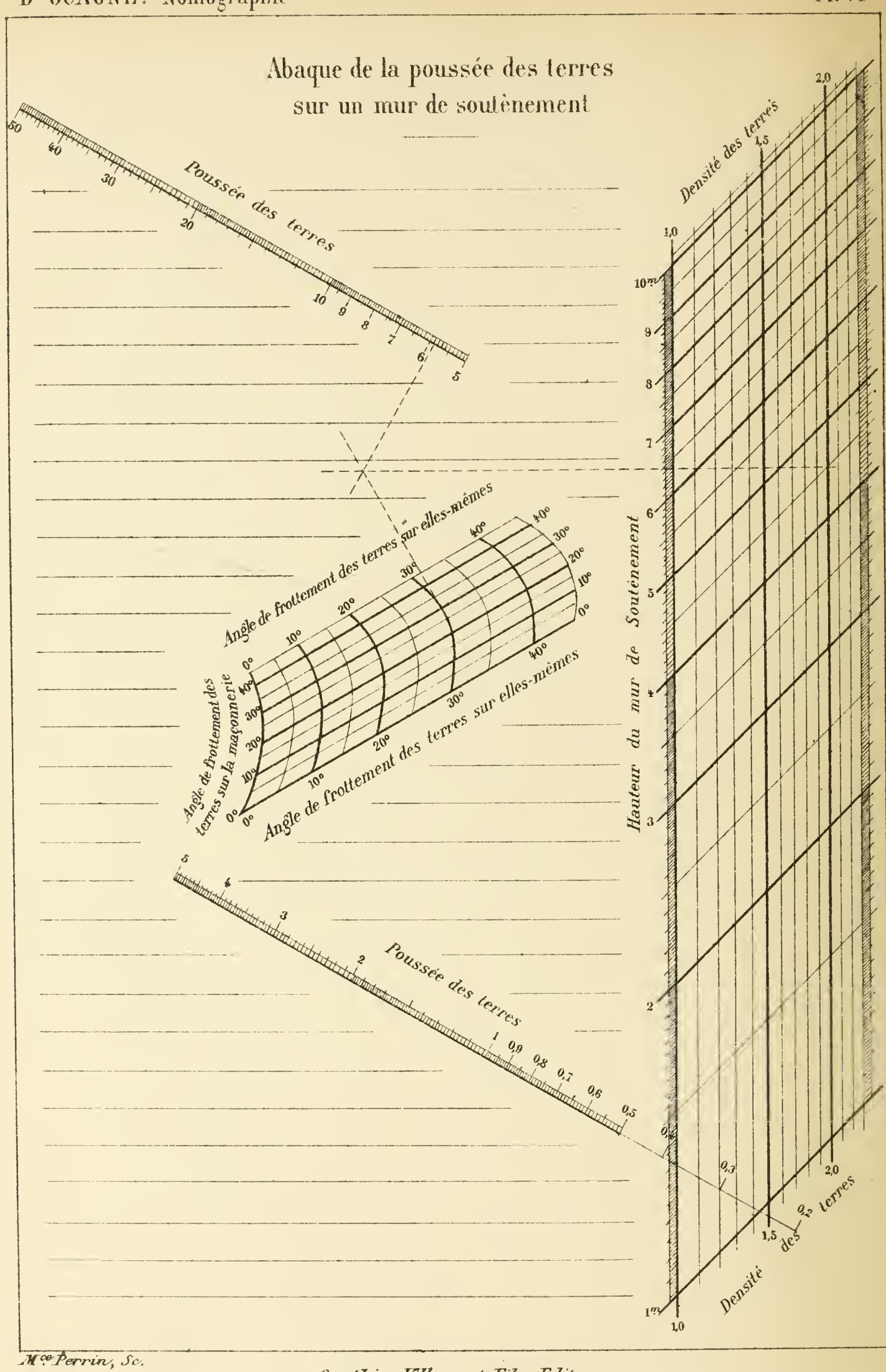
Capital placé

Gauthier-Villars et Fils, Éditeurs


Echelle de r
Echelle de k
Echelle de φ
Echelle de k
Echelle de φ
Echelle de p

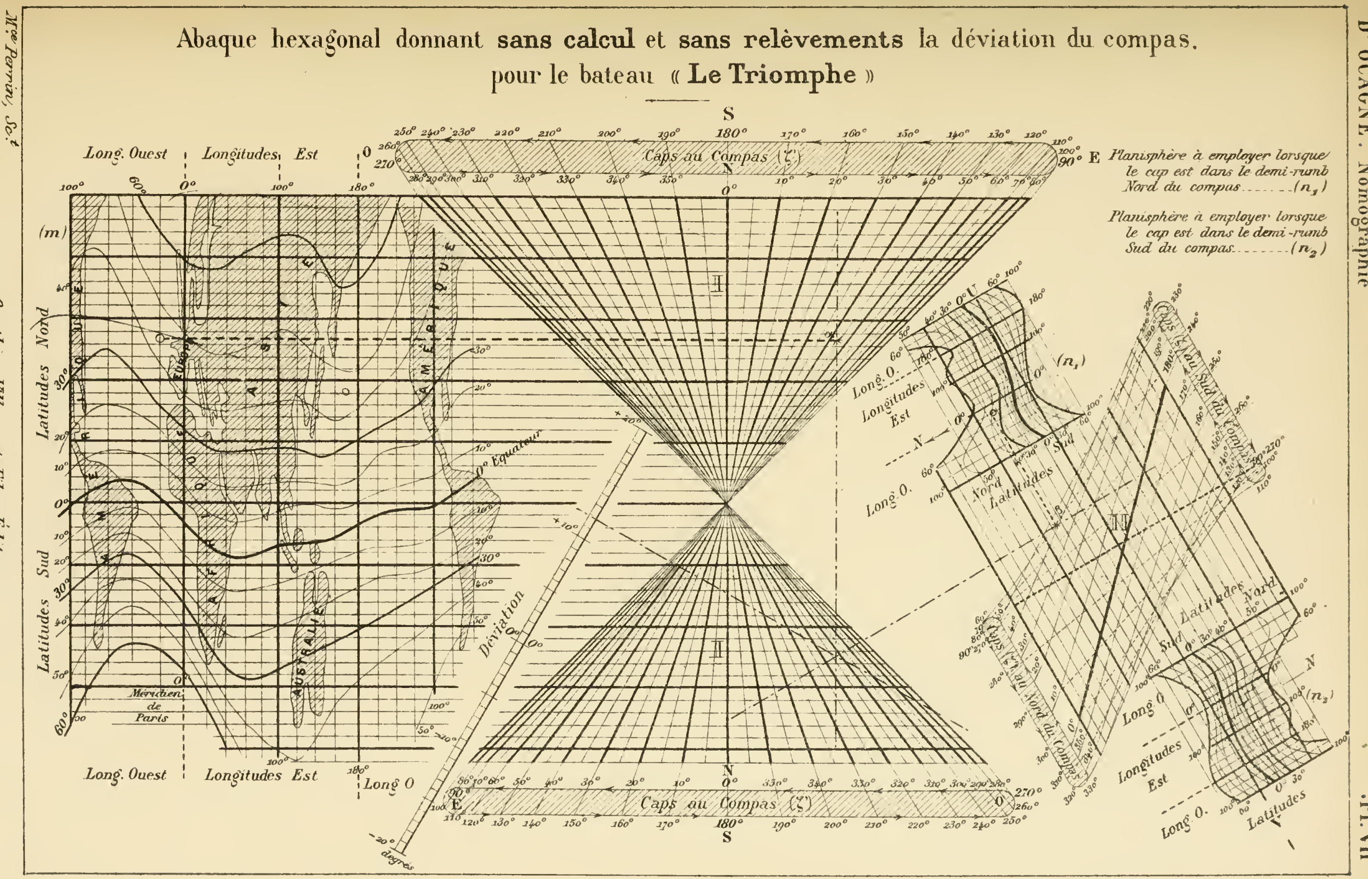


Mce Perrin, Sct
Gauthier-Villars et Fils _ Éditeurs.



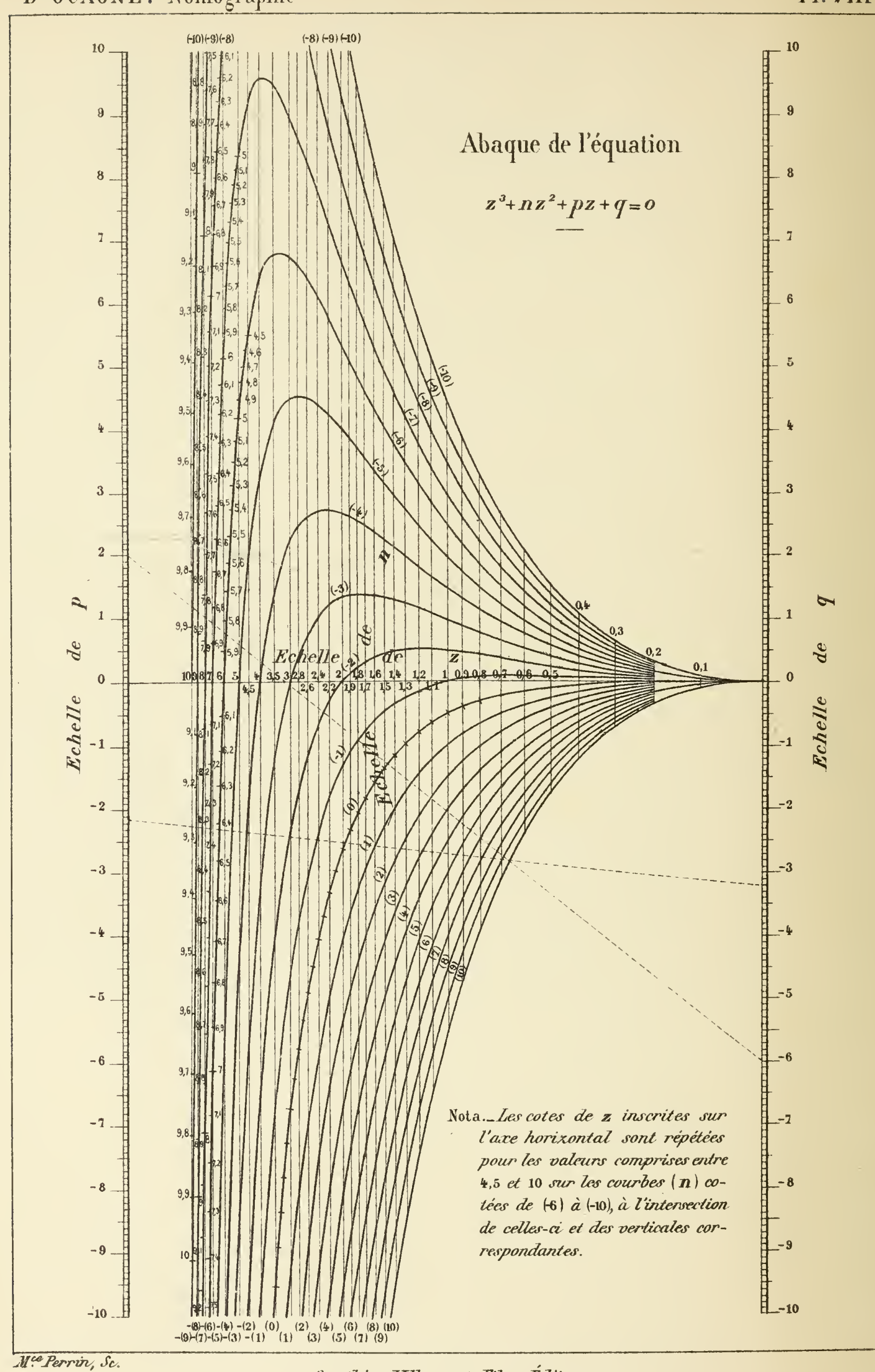
Mme Perrin, Sc.

Gauthier-Villars et Fils_Editeurs.



Mce Perrin, Sc.t

Gauthier-Villars et Fils. Éditeurs.



Mme Perrin, Sc.
Gauthier-Villars et Fils_Éditeurs.

17329 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55